



## Recorrido por diversos conceptos matemáticos con Geogebra

M<sup>a</sup> José Haro Delicado [mjharo@ono.com](mailto:mjharo@ono.com);

IES Al-Basit Albacete

María Sotos Serrano [maria.sotos@uclm.es](mailto:maria.sotos@uclm.es)

Facultad de Educación UCLM Campus de Albacete

Con este trabajo queremos presentar dos propuestas didácticas para trabajar conceptos relativos a Geometría (Rectas y puntos notables del triángulo) y Análisis (Teorema Fundamental del cálculo integral y Regla de Barrow) utilizando Geogebra. En los dos casos se ha experimentado en el aula con buenos resultados.

### 1. Introducción

El desarrollo de un tema o de una unidad didáctica no se debe reducir a organizar unos contenidos y procedimientos seguidos de unas actividades de aplicación. Para planificar de forma eficaz la actividad docente necesitamos otras componentes que nos permitan diseñar, desarrollar y evaluar nuestra actuación en el aula.

Según Luis Rico (1997), dichas componentes deben permitir la creación de material didáctico flexible en el que se tenga en cuenta:

- La evolución del conocimiento, que ha de llegar al alumno como algo que dio respuesta a una necesidad surgida en un determinado momento de la historia.
- La experiencia sobre las formas de aprendizaje del alumno. El estado evolutivo del razonamiento y capacidad de comprensión y asimilación del mismo.
- Las interpretaciones correctas o erróneas de los conceptos adquiridos, que se han puesto de manifiesto en los alumnos a lo largo del tiempo.
- Las diferentes formas de representación del contenido que puedan permitir al alumno crear visualizaciones y objetos mentales que le faciliten el aprendizaje (Duval, 1993).
- La concreción de los aprendizajes que el estudiante está adquiriendo en situaciones reales y prácticas que le permitan ver la utilidad de lo que está aprendiendo y la necesidad de ello (Freudenthal, 1992).
- La variedad de materiales manipulativos y de recursos, como las Tecnologías de la Información y de la Comunicación, que pueden utilizarse en la enseñanza y ayudan al alumno en su proceso de construcción del conocimiento (Ortega et al, 2007).
- Y, por último, que permitan evaluar de manera precisa y objetiva, no sólo, los conocimientos adquiridos, sino las destrezas, capacidades, carácter práctico y evolución del alumno.

Partiendo de esta base, se ha considerado que al introducir al alumno en conceptos matemáticos propios de la geometría y del cálculo integral se deberían tener en cuenta los siguientes cinco organizadores: Errores, representaciones, materiales y recursos, fenomenología y aplicaciones y desarrollo histórico. Basándonos en ellos hemos elaborado nuestras propuestas didácticas.

- ❖ Errores: El uso del error como organizador de contenidos matemáticos hace que el alumno sea consciente de ellos e intente superarlos.

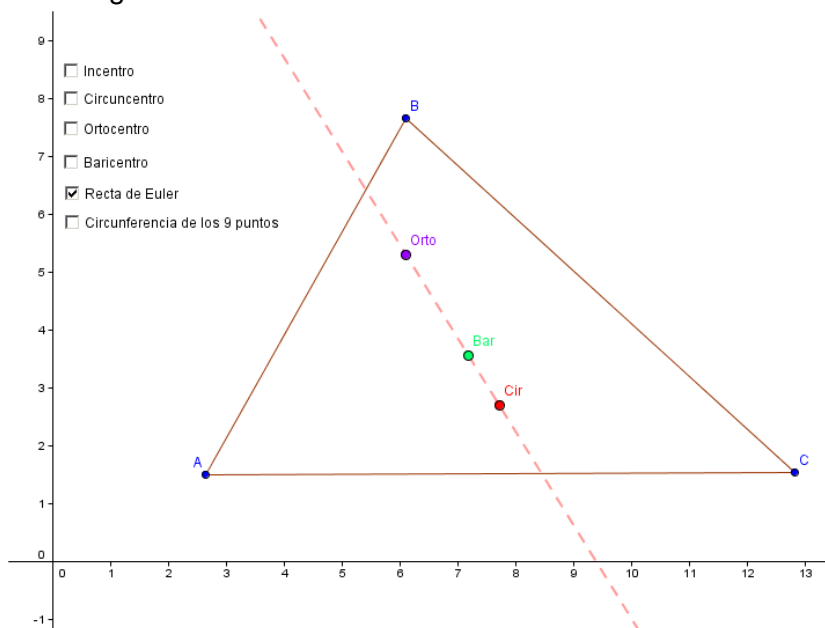
- ❖ **Representaciones:** El estudiante debe interiorizar previamente conceptos y procedimientos para poder asimilarlos después. Dicho proceso de interiorización necesita de representaciones internas o imágenes mentales que ayuden a manejar dichos conceptos a través de operaciones con los mismos. La formación de dichas imágenes necesita de representaciones externas que la hagan posible, puesto que, sin ellas, los objetos matemáticos no podrían ser percibidos.  
La variedad de representaciones de un mismo concepto o procedimiento facilita su comprensión y asimilación y permite captar más propiedades y características del mismo, así como las relaciones e interconexiones con otros conceptos y procedimientos.
- ❖ **Materiales y recursos:** Nuestras dos propuestas se realizan con Geogebra. Enseñar supone crear condiciones que produzcan la apropiación del conocimiento por parte de los alumnos. El enorme potencial de Geogebra permite a los estudiantes interactuar y manipular, lo que equivale a descubrir investigando. Según Ortega et al (2007) trabajando con software educativo el nivel de razonamiento es superior al que se alcanza en el aula con la metodología tradicional.
- ❖ **Fenomenología y aplicaciones:** Estos dos términos permiten organizar los contenidos y determinar objetivos de aprendizaje, al hacer posible el establecimiento de contextos y aplicaciones donde se ponga de manifiesto el significado de dichos contenidos. Se considera importante presentar un número suficiente de situaciones o contextos reales que permitan justificar el desarrollo del contenido matemático, de modo que aparezcan claramente relacionados los conceptos y procedimientos con los fenómenos que organizan.
- ❖ **Desarrollo histórico.** Se trata de utilizar la génesis del conocimiento matemático, así como su evolución, con el fin de motivar a los estudiantes y despertar su interés en la construcción de su propio conocimiento. La revisión de algunas dificultades históricas en la construcción y evolución de un determinado concepto, así como el conocimiento de los personajes implicados y de las dudas que experimentaron, hará que los estudiantes se sientan más involucrados y menos espectadores ajenos al hecho.

## **2. Primera propuesta: Rectas y puntos notables del triángulo**

Trabajar con regla y compás, según el modo de la Grecia clásica, los elementos más característicos del triángulo como bisectrices, mediatrices, medianas y alturas y sus puntos de intersección, así como la recta de Euler, resulta muy instructivo pero puede resultar algo farragoso, sobre todo si se quieren dibujar todos sobre un mismo triángulo, con el fin de obtener relaciones entre todos ellos. Nuestra experiencia nos ha indicado que introducir Geogebra como herramienta didáctica ayuda en el proceso, hace más viable y menos tediosa la tarea y se potencia el uso de la imaginación y de la creatividad a través del buen uso de las opciones del programa. Después de un repaso por el desarrollo histórico de los elementos notables del triángulo, en nuestra experiencia en el aula se han ido introduciendo paulatinamente los conceptos de Mediatriz

y Circuncentro, Mediana y Baricentro, Altura y Ortocentro y Bisectriz e Incentro, para analizar sus características según los diferentes tipos de triángulos y finalizar con la recta de Euler, estableciendo las relaciones entre dichos puntos notables.

El trabajo se ha desarrollado con 16 alumnos de 2º de la ESO, en tres sesiones de tres horas cada una, introduciendo previamente a los estudiantes en el manejo del programa, presentando de manera general las diversas opciones e indicándoles, posteriormente, cómo trabajar con opciones más avanzadas, referidas a la introducción de casillas de control para presentar u ocultar objetos. Ello ha permitido que no se mostraran todas las rectas y puntos a la vez y que se pudieran manejar y visualizar sólo determinados objetos, aunque las construcciones se hubieran realizado sobre el mismo triángulo.



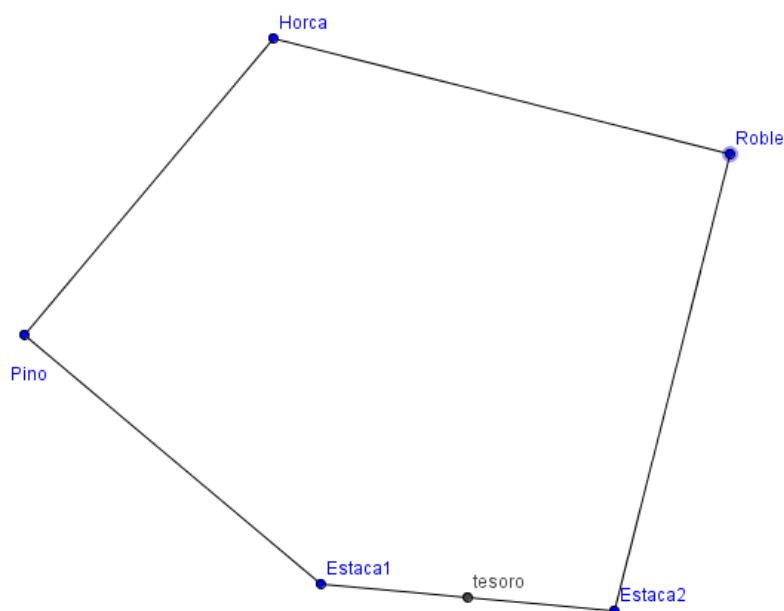
Poder, con un esfuerzo mínimo, trabajar sobre diferentes tipos de triángulos ha permitido “ver” lo que ocurría con toda claridad y facilidad y ha abierto la puerta a la reflexión sobre por qué ocurrían así las cosas, a la vez que surgían nuevas preguntas que exigían respuestas más complejas y elaboradas. Como ya se ha indicado en la introducción, para nosotras es muy importante poner de manifiesto la necesidad e importancia real de los conceptos que se han de aprender. Ha sido uno de nuestros objetivos el buscar actividades apropiadas para ello. Mostramos a continuación una de dichas actividades, en la que se presenta un escenario en el que era difícil imaginar que tendrían cabida los conceptos aprendidos.

*Otro tesoro: El joven aventurero Pepito Pinto encontró en una antigua casa abandonada, un pergamino que describía la situación de un tesoro pirata enterrado en una isla desierta. Las instrucciones eran las siguientes:*

*“Cuando llegues a la isla encontrarás solamente dos árboles (un pino A y un roble B), y los restos de una horca que antiguamente se utilizaba para ajusticiar a los traidores. Cuenta los pasos que hay desde la horca hasta el pino, gira 90º a la izquierda y camina al frente el mismo número de pasos; allí clava una es-*

*taca en el suelo. Vuelve a la horca, cuenta los pasos que hay desde la horca al roble, al llegar al roble, gira 90° a la derecha y camina al frente el mismo número de pasos que acabas de dar; allí clava otra estaca en el suelo. El tesoro lo podrás encontrar en el punto medio de las estacas.” Pepito fletó un barco y navegó hasta la isla. Cuando llegó encontró los árboles pero su sorpresa fue de aúpa cuando descubrió que la horca había desaparecido y no había quedado rastro de ella. Desesperado comenzó a cavar por toda la isla, pero sus esfuerzos eran inútiles. ¿Sabrías encontrar tú el tesoro?*

Seguir los pasos de Pepito Pinto en su búsqueda del tesoro, partiendo de una horca “fantasma” permitirá descubrir relaciones muy interesantes entre los protagonistas de la historia (horca, árboles, estacas y tesoros) y necesitarán aplicar algunos de los conceptos trabajados previamente.

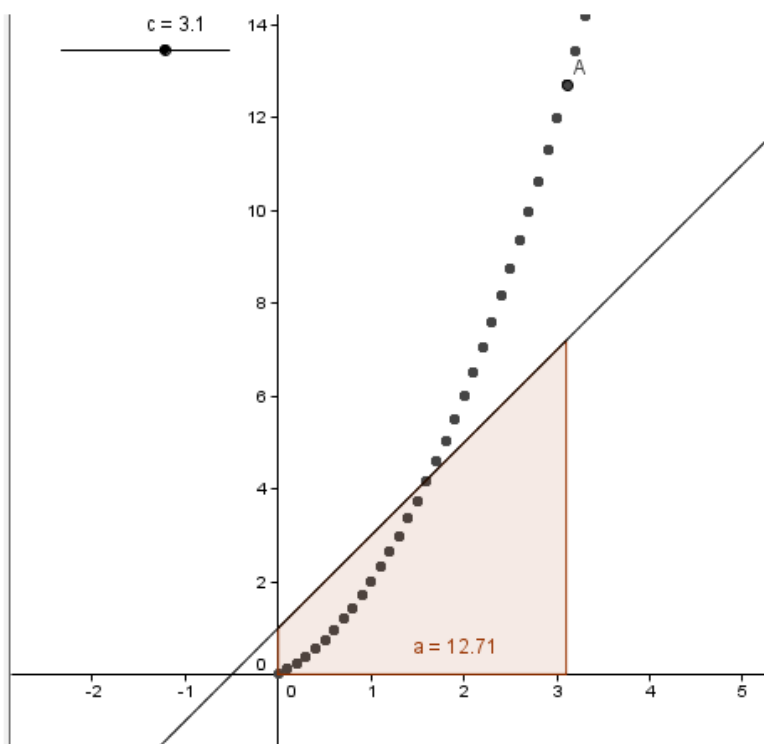


A modo de conclusión, diremos que los estudiantes no tuvieron ninguna dificultad a la hora de aprender a utilizar Geogebra y todos realizaron con éxito todas las actividades propuestas. Disponíamos de un ordenador por persona, con lo cual, el trabajo se realizó individualmente. El uso de Geogebra permitió trabajar más deprisa y sobre más conceptos. Los estudiantes, además de seguir pautas ya establecidas y adquiridas previamente pudieron analizar los problemas desde diferentes puntos de vista y ampliar las situaciones problemáticas. Algunas de las últimas actividades de aplicación práctica de los conceptos adquiridos resultaron más complicadas, pero poder representar gráficamente las características de los problemas y manipularlas ayudó mucho a obtener las respuestas. El desarrollo histórico, así como el estudio de aplicaciones prácticas supuso una muy importante fuente de motivación.

### 3. Segunda propuesta: Teorema fundamental del Cálculo integral y regla de Barrow.

Esta propuesta se ha desarrollado con 27 estudiantes de 2º de Bachillerato de Ciencias. La finalidad de la misma era la introducción del Teorema Fundamental del Cálculo integral y de la regla de Barrow. Se inició el trabajo con un repaso histórico por el desarrollo del concepto de integral definida. Posteriormente, se fueron introduciendo los conceptos correspondientes con actividades de muy diversa índole.

Nos vamos a centrar en las actividades en las que había que calcular y dibujar las áreas de recintos limitados por funciones sencillas (rectas, parábolas e hipérbolas principalmente), el eje de las X y las ordenadas en  $x=a$  y  $x=c$ , donde  $c$  variaba dentro de un intervalo. Para cada función, se elaboró una tabla en la que se situaban los valores de  $c$ , como variable independiente y las correspondientes áreas, como variable dependiente. Usando Geogebra se representaban los puntos obtenidos en la tabla y posteriormente se intentaba asociar el “rastros” obtenido al representar dichos puntos con algún tipo de función relacionada con la inicial. En estas primeras actividades, **la primitiva se anulaba en el extremo inferior del intervalo**. Posteriormente, se les pidió que calcularan la primitiva de constante nula de la función y que la representaran gráficamente. De esta forma se preparó el camino para la presentación del Teorema Fundamental del Cálculo Integral.



Después de trabajar con el teorema, se les pidió que hicieran lo mismo con funciones como las siguientes y en los intervalos que se indican:

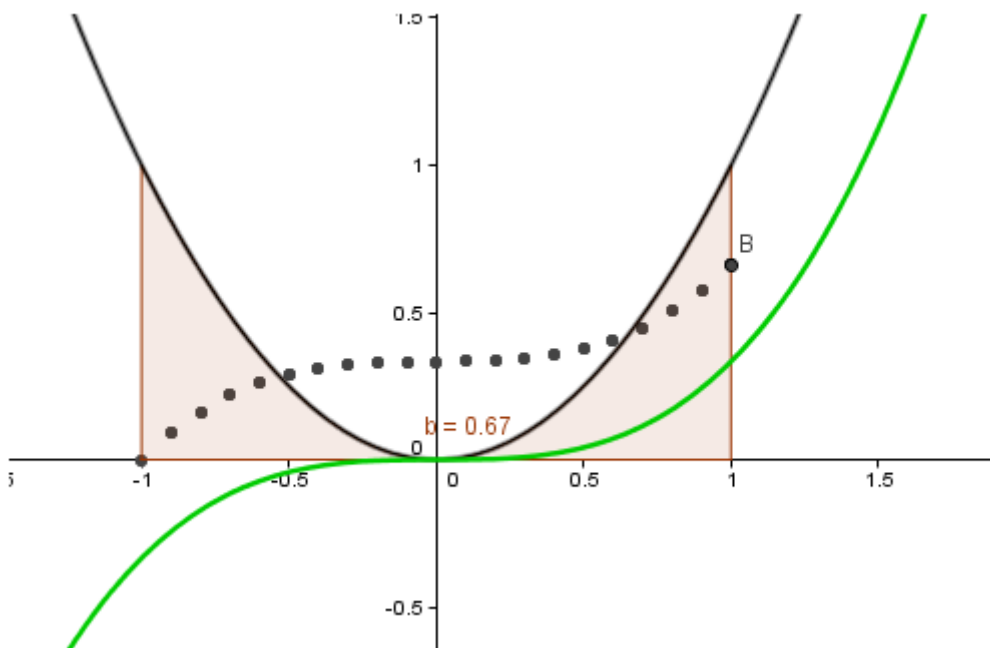
$$f(x)=x+2; x \in [1,3]$$

$$g(x)=x^2; x \in [-1,1]$$

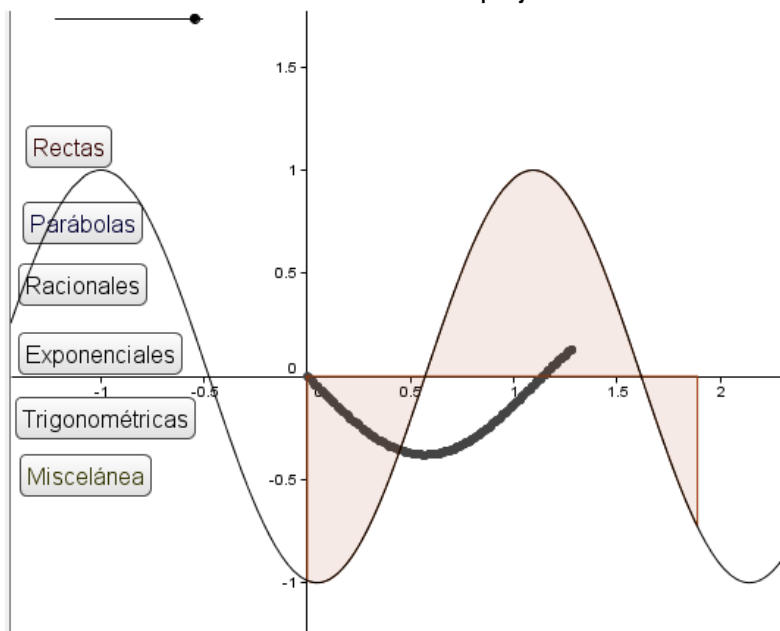
$$h(x)=e^x; x \in [-1,1]$$

Al trabajar sobre estas funciones aparecían diferencias entre las gráficas de sus primitivas y las gráficas de la función área. Estas diferencias se resolvían con una simple traslación. Se pedía a continuación a los estudiantes, que en las gráficas en las que

habían encontrado diferencias, introdujeran modificaciones en la función primitiva para hacerla coincidir con la función área. Una vez resuelta la actividad se les hacía ver la relación entre el valor utilizado en la traslación y el valor de la primitiva en el extremo inferior de cada intervalo. La resolución de estas actividades llevó directamente a los estudiantes a la obtención de la regla de Barrow.



Con Geogebra, se puede crear una base de datos de funciones desde la que trabajar en muy diferentes tipos de situaciones, con lo cual, se puede profundizar más en los conceptos, adentrándose en situaciones más complejas.



Los estudiantes trabajaron por parejas y llegaron a la formulación de la regla de Barrow sin dificultad. En lo que se refiere al desarrollo del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, identificaron en casi todos los casos la clase de función a la que pertenecía la función área y en bastantes grupos la asociaron con una primitiva de la

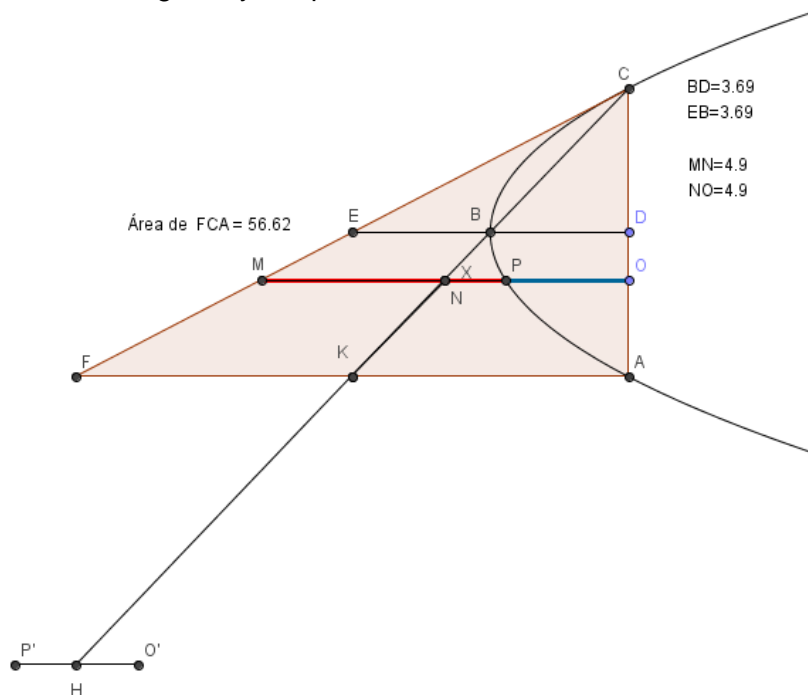
misma. Manejar repetidas veces aspectos presentes en la demostración del citado teorema ha mejorado notablemente su comprensión del mismo y, sobre todo, se ha podido profundizar en su significado, trabajando con una gran variedad de problemas diferentes.

Aunque en este caso algunas de las aplicaciones prácticas son más evidentes, hay una gran variedad de situaciones en las que no parece tan claro. Presentamos a continuación una de las actividades de aplicación y que está relacionada con conceptos de la física como el trabajo realizado por una fuerza cuando varía la intensidad de la misma.

*Un saco de grano con un agujero en el fondo, por el cual se desparrama el grano, pesa  $(100 - \frac{50x^2}{49})$  kg cuando el saco está a  $x$  metros del suelo. El saco se levanta 7 metros. ¿Cuál será el trabajo realizado para levantar el saco a diferentes alturas, hasta llegar a los 7 metros? (Alexander et al., 1973)*

Una de las actividades utilizadas en la Introducción histórica y que es el estudio de métodos mecánicos utilizados por Arquímedes en su libro “El método” para calcular el área de un segmento parabólico (Kline, 2012). Los estudiantes tuvieron que seguir los pasos de este eminente matemático para reproducir el original proceso desarrollado. Geogebra se convirtió en una herramienta de gran ayuda para ello.

HK·OP=10.65·3.28=34.96  
KN·MO=3.56\*9.81=34.96



Los estudiantes se involucraron mucho en la resolución de esta actividad, que se convirtió en un auténtico trabajo de investigación.

**4. Bibliografía**

- Alexander, H. et al. *Curso programado de cálculo: Aplicaciones y técnicas de integración*. Barcelona, Editorial Reverté, 1973.



## Revista Digital Sociedad de la Información

- Duval, R.. “Semiosis y Noesis”. En Sánchez y Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela francesa* (pp. 118-144). México: Departamento de Didáctica Educativa del CINVESTAV-IPN, 1993.
- Freudenthal, H.. “Problemas mayores de la educación matemática”. En R. Combray, E. Sánchez y G. Zubieta (Comps.), *Antología en educación matemática* (pp. 7-27). México:SME-CINVESTAV, 1992.
- Kline, M.. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días vol.I*. Madrid: Alianza Editorial, 2012.
- Ortega, C. et al (Eds.). *Informática educativa: Realidad y futuro*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha, 2005.

# SOCIEDAD DE LA INFORMACION

[www.sociedadelainformacion.com](http://www.sociedadelainformacion.com)

Edita:



Director: José Ángel Ruiz Felipe

Jefe de publicaciones: Antero Soria Luján

D.L.: AB 293-2001

ISSN: 1578-326x