Concepto y representación de funciones a trozos con Geogebra.

Autor: Francisco Molina López
Correo electrónico: f-molina@teleline.es
Lugar de Trabajo: IESO Vía Heraclea (Balazote, Albacete)

Resumen: Intentaremos sacar el máximo provecho del entorno gráfico que ofrece Geogebra para que los alumnos comprendan el concepto de función a trozos y que aprendan a representarlas. Se detallará el proceso seguido en la creación de un archivo de Geogebra con dicho objetivo así como algunas breves reflexiones sobre las dificultades detectadas.

La posibilidad de disponer de un entorno gráfico tan inmediato e intuitivo es uno de los aspectos que ha hecho de Geogebra (y de otros programas de cálculo simbólico) una herramienta fundamental para la docencia de apartados como los relacionados con las funciones. Es tan sencillo de utilizar que podríamos enseñar a una alumno de 1º de ESO a dibujar funciones que cualquier alumno universitario tardaría muchísimo en analizar.

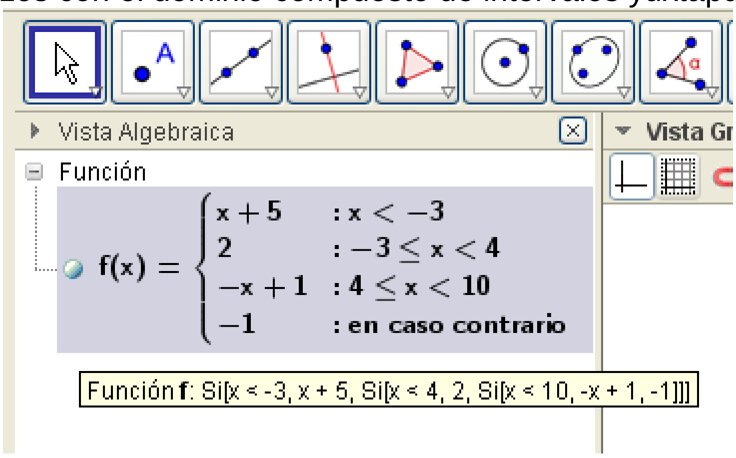
El problema que se plantea es si esta tecnología es “peligrosa” en las manos equivocadas. Hoy en día cualquier alumno de primaria sabe utilizar la calculadora, ¿pero ayuda a que domine las operaciones esenciales? Creo que generalmente sucede lo contrario.

Como siempre, hay que poner cuidado para que la tecnología sea usada correctamente. En este sentido, y volviendo al tema de la representación de funciones: debemos usar Geogebra para algo más que representar una función de forma espectacularmente precisa y rápida.

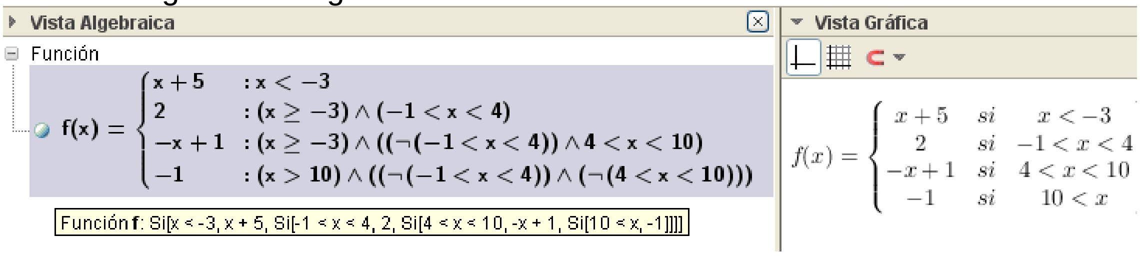
En este aspecto podemos usar el programa como apoyo para intentar que las funciones a trozos se comprendan mejor. Además servirá para apreciar qué es importante para representarlas y agilizará dicha representación.

En un primer acercamiento nos proponemos como objetivo conseguir que Geogebra represente una función a trozos cualquiera. Y encontramos que es tan sencillo como introducir una función usando los comandos condicionales:
Si[<Condición>,<Entonces>,<Si no>]

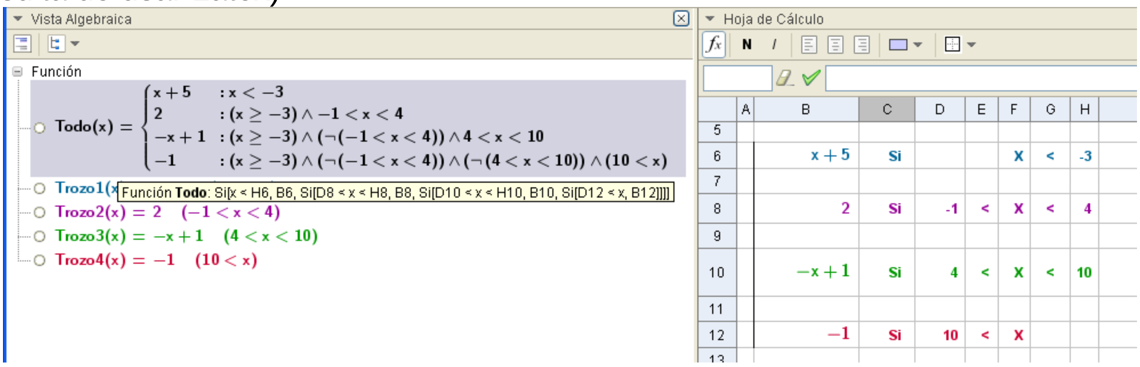
Si se quiere introducir una función con más de dos trozos usaremos el mismo comando anidado. Este formato es muy sencillo para introducir funciones a trozos con el dominio compuesto de intervalos yuxtapuestos.



Aunque creo que didácticamente es más interesante poder usar funciones donde los intervalos que componen el dominio no sean yuxtapuestos. Podemos hacerlo, pero el aspecto de la fórmula que aparece por defecto en la vista algebraica será bastante menos usual (ver la parte izquierda de la siguiente imagen). Si queremos ver la fórmula con el aspecto típico al que estamos acostumbrados, debemos incluir un texto en Latex como el que aparece a la derecha de la siguiente imagen.

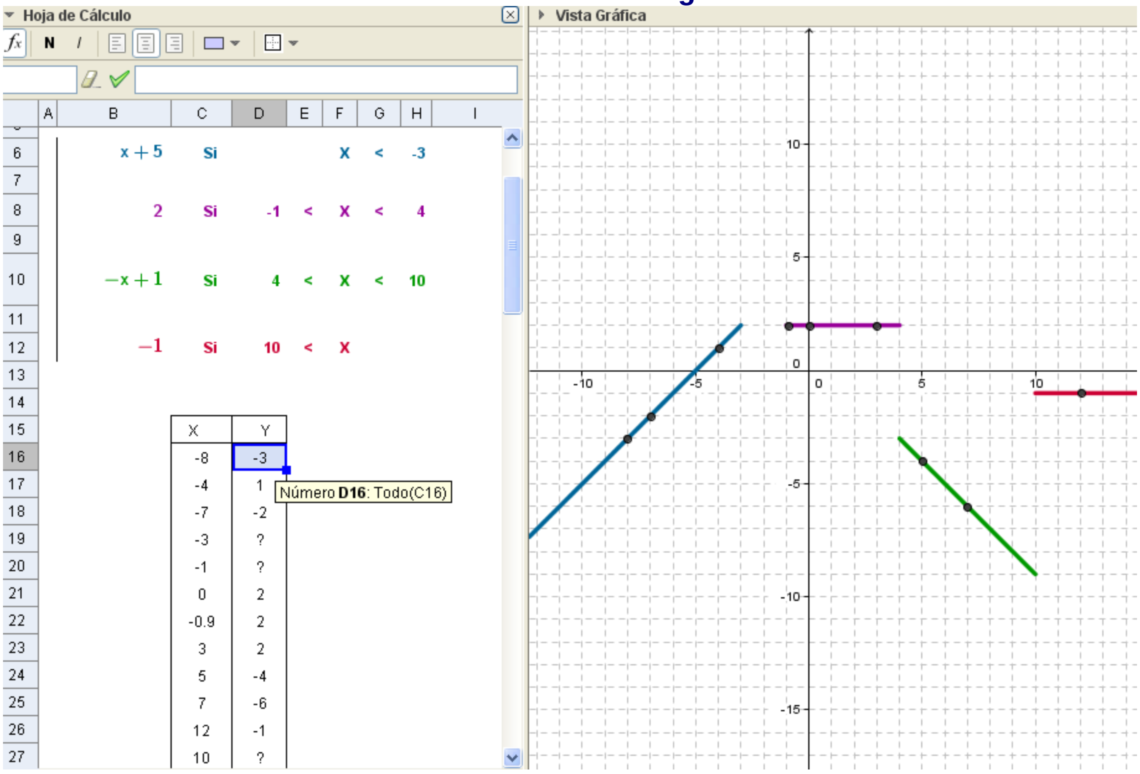


Hay que tener cuidado, no obstante, en definir bien los límites de la función pues el programa permite que se superpongan los intervalos de definición. Aunque la definición de la función evitará dichas superposiciones, ya que el programa interseca la condición anidada con la negación de la condición anterior (como se puede apreciar en la imagen anterior).
Para que la función sea fácilmente modificable en cada uno de sus trozos necesitamos que las fórmulas correspondientes se puedan introducir y modificar sin manipular la expresión "general" de la función. Para eso es necesario introducirlas en algún campo de entrada, y lo más sencillo es ponerlo en una celda de una hoja de cálculo. Del mismo modo preparamos otras casillas para introducir los límites de la región en la que se representa cada trozo. De este modo la función queda fácilmente modificable y con un aspecto similar al que estamos acostumbrados a representarla (aunque no tan aparente como el que resulta de usar Latex).



Como puede apreciarse en la imagen anterior, podemos crear cuatro funciones "marginales" para representar por separado cada uno de los trozos de nuestra función y asignarles un color diferente a cada una. Recordamos que es muy útil la función de ocultar la gráfica de la función con sólo pulsar sobre el punto que la denota en la "vista algebraica".
También debemos observar que aunque introdujésemos los extremos de los intervalos de manera que se superpongan en algunos valores, la función a trozos no dará lugar a contradicciones lógicas. La definición que hicimos anidando los comandos condicionales introduce por defecto en la definición del segundo trozo la intersección con el complementario del primer intervalo. Y hará lo mismo con los sucesivos intervalos. De manera que la función completa coincidirá

con la suma de las funciones marginales siempre que los intervalos que usemos en la definición sean correctos.
Ahora que sabemos cómo introducir y dibujar una función a trozos con Geogebra es cuando apreciamos que no debemos conformarnos con esto. La finalidad última no es que el ordenador dibuje la función por nosotros sino que agilice los cálculos y nos ayude en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos relacionados con las funciones a trozos.
Para poder representar la función a trozos (sobre el papel), nuestros alumnos necesitarán una tabla de valores. Por este motivo, añadiremos una a nuestra hoja de cálculo. Dicha tabla de valores puede ser utilizada tanto para agilizar el cálculo como para hacer comprobaciones rápidas de los valores sugeridos por los alumnos. Esta tabla de valores es muy sencilla de preparar, pues sólo hay que usar una columna de la hoja de cálculo para introducir valores de “x” y otra para obtener los valores de “y” (que serán calculados por sustitución en la función a trozos previamente definida). Posteriormente se crea una lista en la que todos estos pares de valores queden reflejados como coordenadas de puntos y serán dibujados automáticamente por el programa.
Y aquí es donde se encuentra lo que creo que es el mayor potencial para esta forma de aplicación de Geogebra: Generalmente, los alumnos intentan representar las funciones usando sólo la tabla de valores. De manera que nosotros podemos ofrecerles la posibilidad de calcular y representar rápidamente y sin esfuerzo un montón de puntos, y aún así, necesitamos algo más para ser capaces de dibujar la función correctamente.
Para ese “algo más” deben dibujar al menos los extremos de los trozos de los que se compone la función. Esto no lo hace el programa automáticamente en la tabla de valores ya que deliberadamente introduje en las condiciones lógicas que la definen signos de desigualdad estricta. Así la función que hemos definido no comprende en ningún caso dentro de su dominio los valores extremos, y en la tabla de valores aparecerá como valor de la ordenada correspondiente a cada extremo un signo de interrogación.



Lo mismo que sucede con los valores extremos de cada uno de los trozos ocurrirá con el resto del análisis local y global de las funciones. Este deberá llevarse a cabo previamente al dibujo de la función.

Además vemos que con poco esfuerzo podemos modificar este archivo para usarlo en la representación de funciones con menos trozos o funciones sencillas.

Para terminar, le he añadido unas casillas de control para ocultar o mostrar la función completa o los trozos que nos interesen (así podemos tener oculta la vista algebraica). Y he añadido un aviso para el caso de que se cometa algún error y se definan los intervalos superpuestos o que sean definidos al revés.

En clase podemos utilizar este archivo para ir calculando y dibujando puntos muy rápidamente. De esta manera la corrección de los ejercicios será mucho más ágil. Además podemos exportarla en forma de página Web sin los botones de Geogebra ni la barra de entrada de manera que nuestros alumnos también la usen en casa. En este caso podemos decidir si queremos mostrar o no (según nos interese) las casillas de control para ocultar las gráficas.

También se puede crear una tabla de valores accesoria para los valores extremos de cada uno de los trozos de la definición. En esta tabla se anotaría además si el punto obtenido está incluido en el dominio o si por el contrario es un punto “límite”.

Revista Digital Sociedad de la Información

SOCIEDAD DE LA INFORMACION

www.sociedadelainformacion.com

Edita:

Director: José Ángel Ruiz Felipe
Jefe de publicaciones: Antero Soria Luján
D.L.: AB 293-2001
ISSN: 1578-326x