TÍTULO: LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN BACHILLERATO

Autor: Joaquín Jiménez Ramos

joaquin.jimenez@edu.jccm.es

http://webs.ono.com/jimenez_ab/

Breve resumen: *En esta comunicación se pretende exponer como introducir el programa de Geogebra en la enseñanza y aprendizaje de los números complejos en Bachillerato, mediante la construcción de ficheros o figuras de Geogebra, elaborados específicamente para facilitar dicho aprendizaje.*

0. Introducción

Teniendo en cuenta, que **Geogebra** es un programa utilizado por una amplia comunidad de usuarios a nivel mundial, y con gran aceptación entre los docentes y los alumnos, es conveniente utilizarlo, como herramienta de enseñanza y aprendizaje en las Matemática. Además, debido a su fácil manejo y a su carácter dinámico, puede ayudar a los alumnos a comprender conceptos matemáticos, a visualizar situaciones geométricas y a resolver o comprobar ejercicios y problemas.

Como los números complejos, se pueden representar mediante sus afijos en el plano, podemos utilizar el programa **Geogebra**, para representar números complejos y operaciones con números complejos, y también, lo podemos utilizar para visualizar y expresar números complejos en forma binómica o trigonométrica, o representar sus raíces enésimas. Y tenemos también la posibilidad de ampliar algunos conceptos, al menos de forma intuitiva, como continuidad o transformaciones geométricas complejas.

Para facilitar el aprendizaje de los alumnos, es conveniente, que se elaboren ficheros o figuras de **Geogebra** específicas, con informaciones, construcciones y herramientas, para que lo utilicen cuando estén aprendiendo los conceptos de números complejos. Cuando efectúan actividades, ejercicios y problemas, es recomendable que utilicen simultáneamente el software **Geogebra**, tanto en el aula, como en casa, para expresar y representar las diversas formas u operaciones de números complejos, así como para comprobar algunas actividades realizadas en el cuaderno. Se puede proponer que consulten la dirección http://alerce.pntic.mec.es/jjir0003/numeros%20complejos/ donde, pueden utilizar figuras y descargar ficheros de **Geogebra**, adaptados al cálculo y representación geométrica de números complejos, que además, vienen acompañados de contenidos básicos. También, se pueden construir ficheros o figuras similares para tal fin.

1. Los números complejos. Expresión binómica.

Debido a la necesidad de utilizar raíces de números reales negativos, por ejemplo, para resolver ecuaciones polinómicas sin solución real, se utilizó, la unidad imaginaria $i=\sqrt{-1}$. Y así por ejemplo, se podría resolver la siguiente ecuación

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Con una introducción similar a esta, podemos ampliar el concepto de número real, mediante la definición de número complejo. Definiendo el conjunto de los números complejos, aquellos números z, cuya **expresión binómica** es la siguiente

$z=a+bi$; denominando $\mathrm{a}=\text{Parte real}=\mathrm{Re(z)}$ y $\mathrm{b}=\text{Parte imaginaria}=\mathrm{Im(z)}$.

Para representar en forma binómica los números complejos con **Geogebra**, podemos utilizar, la figura

http://www.geogebratube.org/student/m29333

Dado, que podemos utilizar las operaciones básicas (+,-,*,/), con los números complejos expresados en forma binómica, por ejemplo, $(1+i)\cdot(2-i)=3+i$, podemos utilizar para operar la figura

http://www.geogebratube.org/student/m29334

Es importante conocer las propiedades que cumplen las operaciones sobre los números complejos, que lo dotan de con la estructura de cuerpo conmutativo. Y también, conocer el conjugado de un número complejo $z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$, que se utiliza con frecuencia en las operaciones de números reales. Para representar el conjugado y el opuesto de un número complejo z, podemos utilizar la figura

http://www.geogebratube.org/student/m29335

2. Modulo y Argumento. Expresión polar y trigonométrica.

Si $z=a+bi$, el **Módulo** o **Norma** de $z=|z|$ y el **Argumento** de $z=Arg(z)$ son

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=r$ y $Arg(z)$ es tal que $a=|z|\cdot\cos(Arg(z))$ y $a=|z|\cdot sen(Arg(z))$.

Si tomamos el argumento principal α (*comprendido entre 0 y 2.pi*), podemos utilizar la **expresión polar** y la **expresión trigonométrica** del número complejo, mediante

$z=r_\alpha$ y $z=r\cdot(\cos\alpha+i\cdot\operatorname{sen}\alpha)$

Ejemplo, si $z=2+2\cdot\sqrt{3}$, como $|z|=4$ y $Arg(z)=Arc\tan(\sqrt{3})=\left\{\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$,

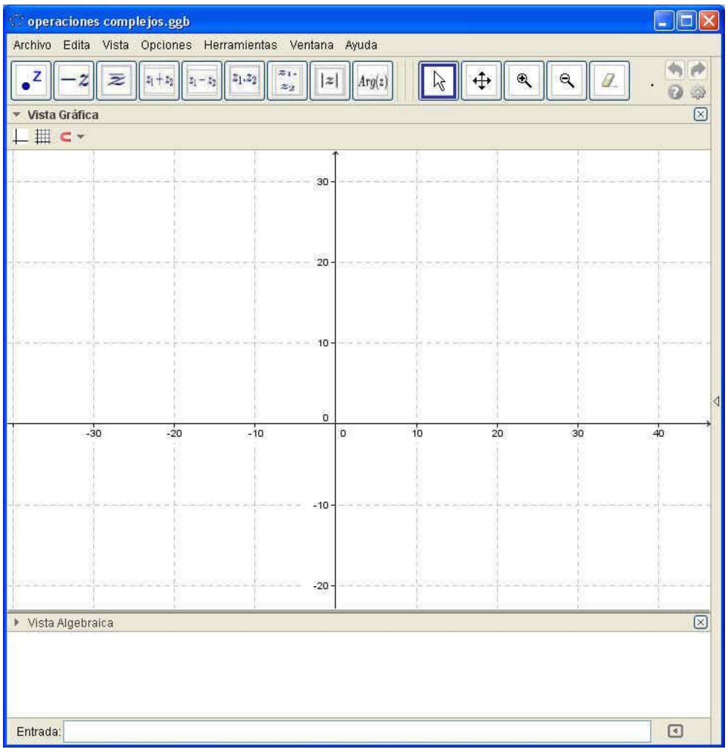
podemos expresar $z=4_{\frac{\pi}{3}}$ y $z=4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

Para representar en forma polar y trigonométrica los números complejos con **Geogebra**, podemos utilizar la figura

http://www.geogebratube.org/student/m29336

Conocidos los conceptos de opuesto y conjugado de un número complejo, operaciones habituales con números complejos, y módulo y argumento complejo, podemos crear herramientas específicas con **Geogebra** para efectuar de forma interactiva los números complejos, y podemos utilizar la figura

http://www.geogebratube.org/student/m29337



Teniendo en cuenta las propiedades trigonométricas, podemos fácilmente multiplicar y dividir números complejos en forma polar o trigonométrica (*Fórmulas de Moivre)*. Además, dado que su representación geométrica es más intuitiva, podemos utilizar para su representación la figura:

http://www.geogebratube.org/student/m29338

3. Potencia y raíz enésima de un número complejo.

Si $z = r_\alpha$, es un número complejo expresado en forma polar.

Para calcular $z^n = z \cdot z \cdot \cdots \cdot z$, generalizando la operación de producto, será $z^n = \left(r^n\right)_{n\cdot\varepsilon}$

Y para calcular la n raíces enésimas de z, si $\sqrt[n]{z} = s_\beta$, se cumplirá

$$r_\alpha = \left(s_\beta\right)^n \Rightarrow r_{\{\alpha+2\cdot k\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\}} = \left(s_\beta\right)^n \Rightarrow r_{\{\alpha+2\cdot k\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\}} = \left(s^n\right)_{n\cdot\beta} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{r} = s \\ \left\{\dfrac{\alpha+2\cdot k\cdot\pi}{n} : k\in\mathbb{Z}\right\} = \beta \end{cases}$$

Que tomando los argumentos principales, será

$$s = \sqrt[n]{r}; \quad \beta = \left\{\frac{\alpha+2\cdot k\cdot\pi}{n} : k = 0,1,2,\cdots,n-1\right\}$$

Cuyos afijos, representan geométricamente los vértices de un polígono regular de n vértices, inscritos en una circunferencia de centro el origen y de radio $\sqrt[n]{r}$. Ejemplo:

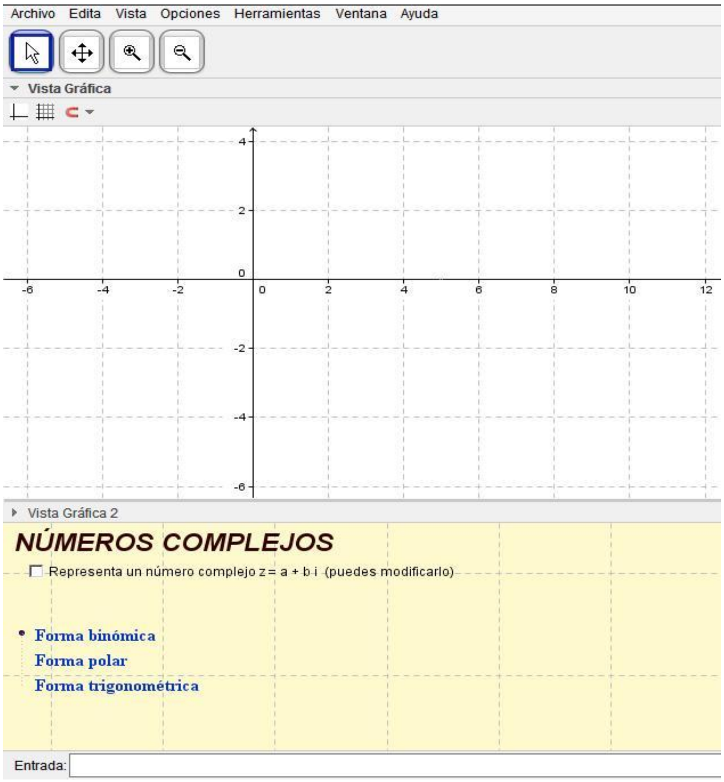
Si $z = 3_{180^\circ} \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \left\{\sqrt[3]{3}_{\frac{180^\circ}{3}}, \sqrt[3]{3}_{\frac{180^\circ+360^\circ}{3}}, \sqrt[3]{3}_{\frac{180^\circ+720^\circ}{3}}\right\} = \left\{\sqrt[3]{3}_{60^\circ}, \sqrt[3]{3}_{180^\circ}, \sqrt[3]{3}_{300^\circ}\right\}$

Para calcular y representar potencias y raíces de números complejos, podemos utilizar la figura

http://www.geogebratube.org/student/m29339

Finalmente, una vez que se han tratado la mayoría de los conceptos y operaciones básicas de números complejos, para operar y representar números complejos en forma binómica, polar o trigonométrica, podemos utilizar la figura

http://www.geogebratube.org/student/m29340



3. Actividades de números complejos. Ampliación.

Conviene que los alumnos efectúen actividades, para que puedan asimilar los contenidos y puedan desarrollar los procedimientos de números complejos. En la dirección http://alerce.pntic.mec.es/jjir0003/numeros%20complejos/ se proponen una serie de actividades.

También, se pueden proponer contenidos de ampliación, aunque sea de forma intuitiva, para que los alumnos que estén interesados, puedan investigar las diferencias que existen, al aplicar funciones, continuidad, o transformaciones geométricas, en el conjunto de los números complejos, para lo cual se propone trabajar la estructura métrica de los números complejos, el concepto de función compleja de variable compleja, la continuidad, la derivada, la exponencial compleja, el logaritmo complejo y las transformaciones geométricas utilizando números complejos, para lo cual podemos utilizar las siguientes figuras de **Geogebra**:

http://www.geogebratube.org/student/m29341

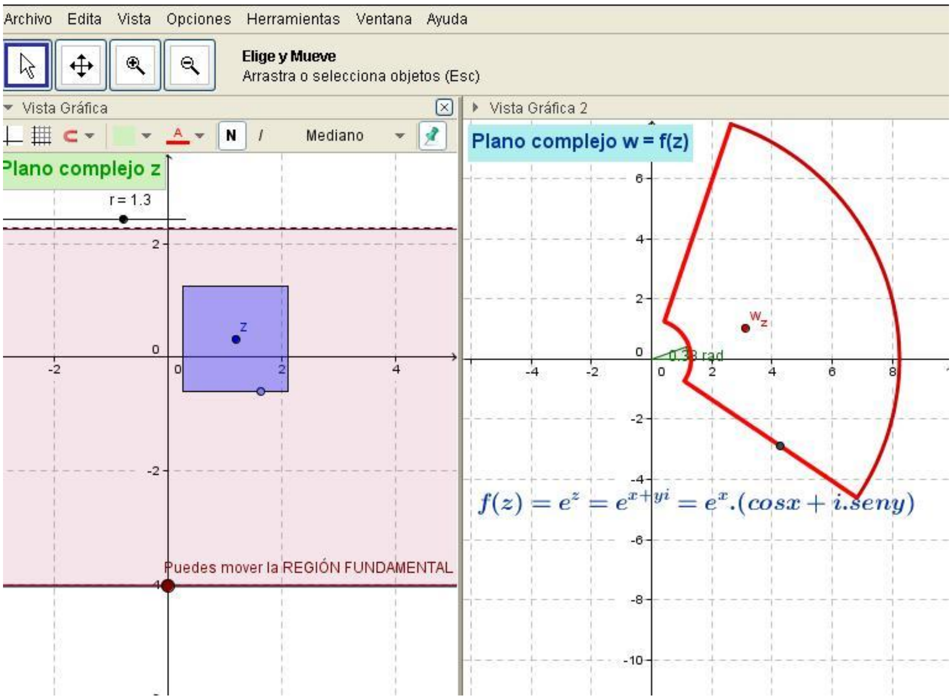
http://www.geogebratube.org/student/m29342

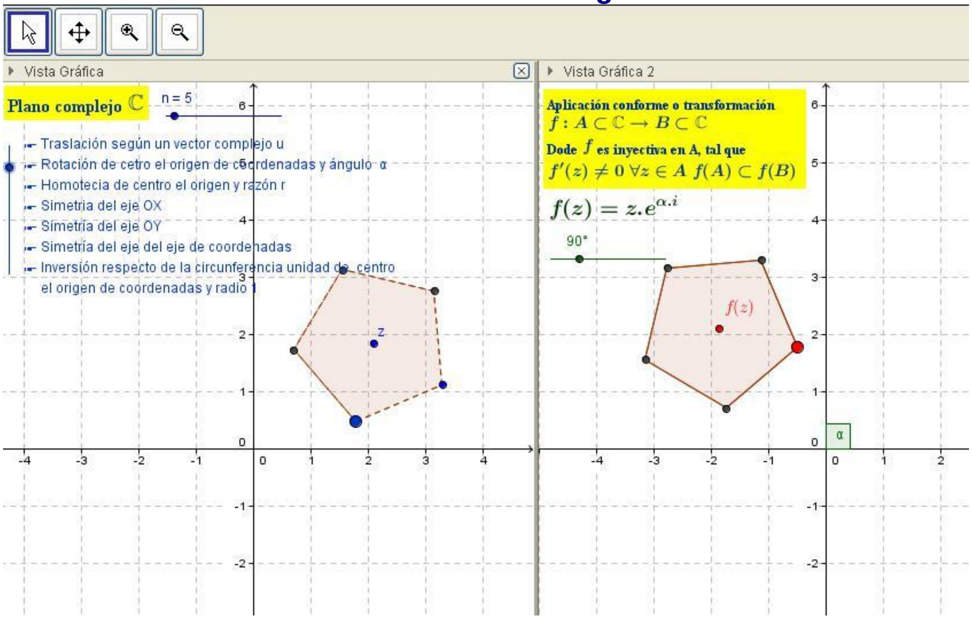
http://www.geogebratube.org/student/m29343

http://www.geogebratube.org/student/m29346

http://www.geogebratube.org/student/m29347

http://www.geogebratube.org/student/m29348





Que también, se pueden descargar los ficheros de extensión ggb, para poder abrir con **Geogebra**, en la página elaborada para los alumnos

4.- Bibliografía

http://alerce.pntic.mec.es/jjir0003/numeros%20complejos/

SOCIEDAD DE LA INFORMACION

www.sociedadelainformacion.com

Edita:

Director: José Ángel Ruiz Felipe
Jefe de publicaciones: Antero Soria Luján
D.L.: AB 293-2001
ISSN: 1578-326x