

## GEOMETRÍA EN 3D CON GEOGEBRA 5

José Muñoz Santonja  
IES Macarena (Sevilla)

[josemunozsantonja@gmail.com](mailto:josemunozsantonja@gmail.com)

Miembro del Instituto de Geogebra de Andalucía

### Resumen.

La versión 5 de geogebra permite trabajar fácilmente las tres dimensiones y que los alumnos visualicen el espacio de una manera evidente. A pesar de encontrarse aún en una versión beta, las muchas posibilidades que encierra permite presentar de una manera rápida muchos conceptos que resultan complicados de ver para nuestros alumnos de ESO y Bachillerato. En esta comunicación pretendo presentar algunos ejemplos contruidos con la versión de geogebra 5 para desarrollar conceptos como la generación de los cuerpos de revolución, la obtención de cónicas por corte a un cono o la posición relativa de dos planos.

### Introducción.

Los que llevamos algunos años trabajando con el programa Geogebra provenimos mayoritariamente de haber trabajado anteriormente con otros programas de Geometría Dinámica, especialmente el Cabri Geometre. Sin embargo, nos hemos acostumbrado a que cada nueva versión de Geogebra nos sorprenda avanzando un escalón en su ascenso al programa perfecto. Ya fue un éxito, al principio, poder contar con los aspectos algebraicos de las construcciones, lo que nos permitía un amplio campo de aplicación en álgebra y análisis. Después vinieron la hoja de cálculo, las aplicaciones estadísticas y probabilísticas, el exportar a html, la versión para Primaria y la introducción del cálculo simbólico. Pero la versión del espacio nos abre un campo aún más rico de posibilidades. Es cierto que ya en Geogebra 3 había un amplio surtido de ejemplos para simular aspectos espaciales, basta revisar los materiales del [Proyecto Gauss](#). Se pueden encontrar excelentes ejemplos en los que la perspectiva nos permite visionar figuras tridimensionales. Pero en la nueva versión nos encontramos con la ventaja de poder cambiar con facilidad el punto de visión sobre la misma construcción para estudiar mucho más detalles.

La posibilidad de dibujar en el espacio es por si sola una gran ventaja para los que somos bastante limitados en las dotes de dibujo y nos encontramos con el sufrimiento de dibujar en la pizarra posiciones relativas de tres planos.

Por otro lado, la visión espacial de nuestros alumnos deja bastante que desear. Lo anecdótico es que en Infantil se trabaja mucho el espacio y los chavalines suelen moverse bien en él, seguramente por trabajar con construcciones físicas de esos modelos. Pero a medida que van subiendo en su escala educativa, esa visión se va perdiendo. Posiblemente sea debido a que los profesores nos replegamos a las representaciones planas en papel o en la pizarra NINI (ni informatizada, ni interactiva). Así llegamos a la Geometría Analítica en segundo de bachillerato y raro es el año en que no

tenemos que señalar las paredes del aula para que algunos alumnos acepten que tres planos en el espacio se pueden cortar en solo un punto.

Mi intención, en esta comunicación, es mostrar, a las personas que aún no conozcan la versión 3D de Geogebra, algunas de sus posibilidades para hacer construcciones en las que los alumnos puedan ver contenidos habituales de las matemáticas de secundaria.

### Cuerpos de revolución

La posibilidad de rotar objetos como puntos o polígonos alrededor de un eje de revolución, nos permite recrear cómo se generan los cuerpos de revolución de una manera evidente. Podemos ver un ejemplo de obtención del cilindro en la imagen 1.

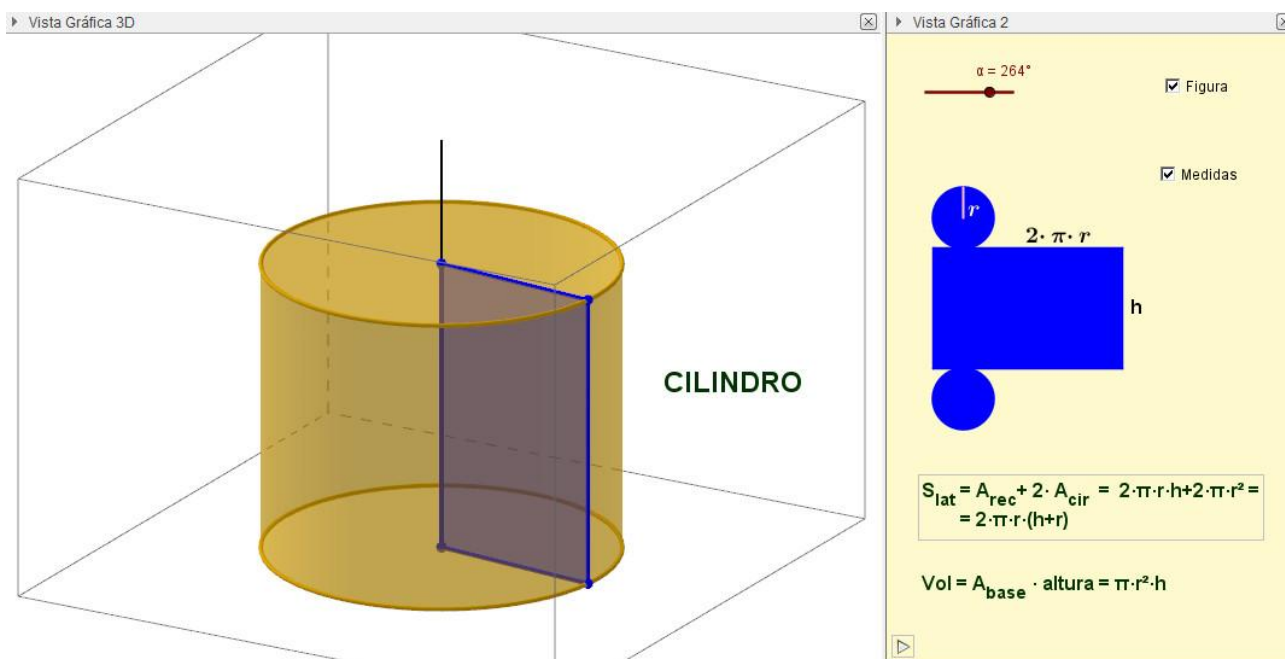


Imagen 1: Generación del cilindro

Al estar trabajando de momento con una versión no estable ni completa hace que algunas cosas aún no funcionen bien. Al menos a mi no me ha funcionado la opción de dejar rastro. A pesar de figurar como activada, lo cierto es que no he conseguido que el rectángulo deje un rastro al girar, no se si por desconocimiento personal o porque aún no funciona correctamente. Pero es de suponer que en la versión alfa funcionará correctamente. De todos modos la simpleza con que se dibuja un cilindro permite superar sin dificultad este problema.

### Generación de cónicas

Podemos dibujar un cono y al cortar mediante un plano que sea perpendicular, oblicuo o paralelo al eje de revolución obtener la circunferencia, elipse e hipérbola. Si el plano lo ponemos paralelo a la generatriz nos aparece la parábola cuando cortemos el cono.

Tenemos dos posibilidades de dibujar un cono. Que sea finito, que sería el obtenido al girar un segmento oblicuo que se apoya en el eje de rotación, en cuyo caso podemos

obtener, al cortar, la circunferencia, elipse y parábola. O que sea infinito, que sería el obtenido al girar una línea recta secante con el eje de revolución cuando gira alrededor de él. En este caso obtenemos la hipérbola como se observa en la imagen 2.

Tal como yo he realizado la construcción, los planos los he puesto convenientemente para obtener las cuatro cónicas. Habría la posibilidad de poner deslizadores para variar la posición del plano, como veremos más adelante, de forma que sean los propios alumnos los que investiguen cuando se obtiene un elemento u otro. Pero en ese caso convendría entregar una ficha de forma que vengan señalados las ecuaciones de los planos que deben probar, para ver qué cónica se obtiene, porque hacerlo a voleo es extremadamente difícil.

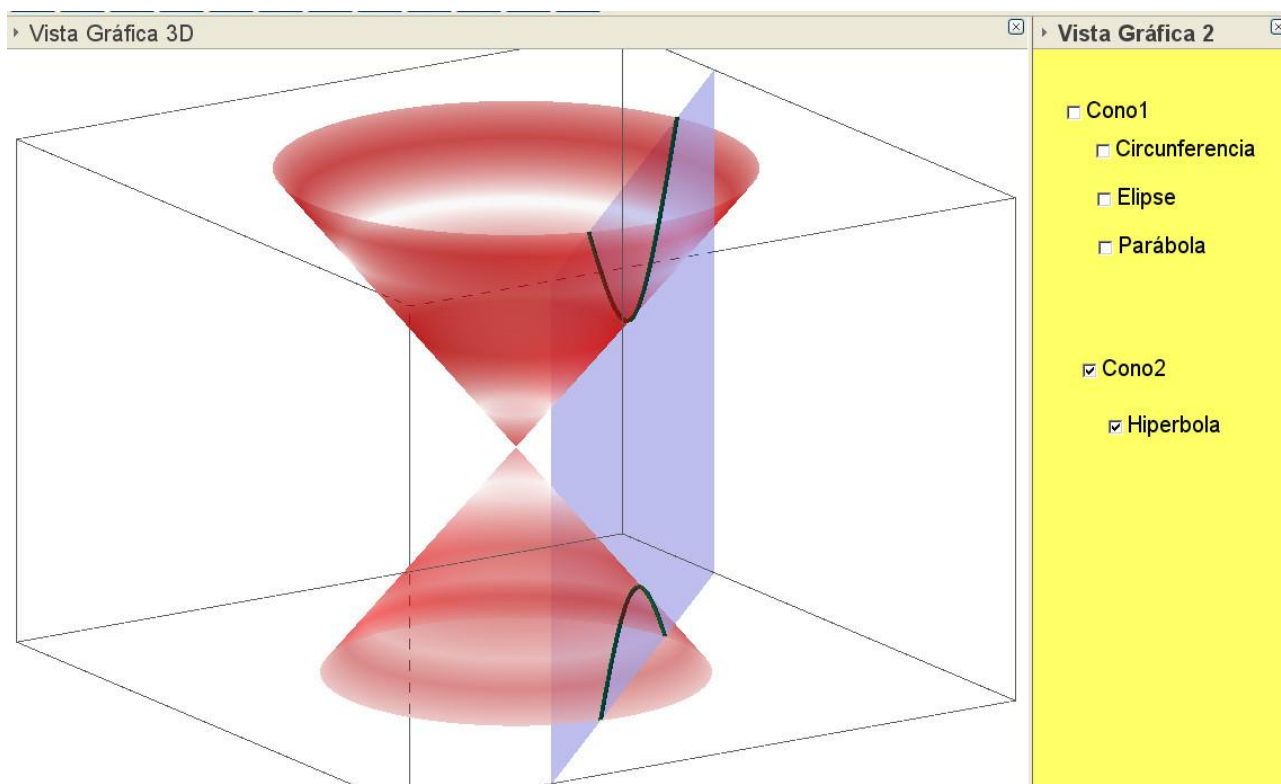


Imagen 2: Obtención de la hipérbola

### Estudios de geometría analítica

He trabajado varios aspectos de los que he tenido que explicar siempre en la geometría analítica de segundo de bachillerato. Ya he planteado mis dificultades para dibujar en perspectiva imágenes reconocibles, por lo que para mi ha sido una gran ayuda, trabajando con la PDI, el poder llevar preparadas las imágenes que necesitaba. Geogebra también sirve para explicar visualmente cuál debe ser el proceso para realizar algunos cálculos.

En una de las construcciones, de la que puede verse uno de los pasos en la imagen 3, se les explica a los alumnos, paso por paso, uno de los métodos para hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan. Como además he estado cuatro años trabajando en materiales digitales para la enseñanza a distancia, el poder disponer de estos tutoriales, sin necesidad de crear un vídeo, nos resulta una buena herramienta.

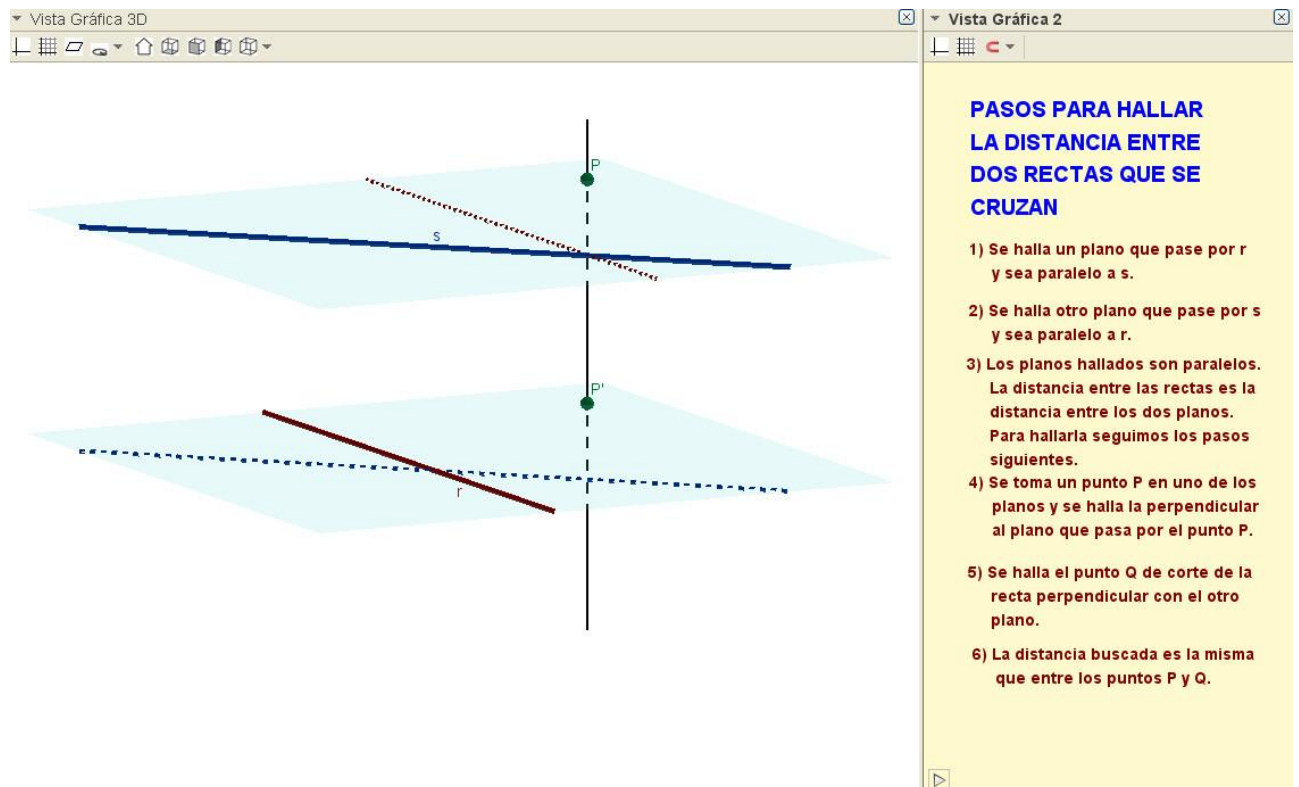


Imagen 3: Distancia entre rectas que se cruzan

### Posición relativa de dos planos

Desde hace años utilizo Geogebra para que los alumnos investiguen posibilidades manipulando los elementos de algunas construcciones. Por ejemplo, siempre he utilizado una construcción para estudiar gráficamente la solución de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, viendo la cantidad de soluciones que existen según la posición de las rectas correspondientes a cada ecuación.

De forma análoga se puede trabajar para estudiar las posiciones relativas en el espacio con Geogebra 5. El poder escribir un plano a partir de su ecuación general  $Ax+By+Cz+D=0$ , permite sustituir los coeficientes por deslizadores y de esa manera mover la posición del plano a conveniencia.

Como la recta se expresa en forma vectorial, es fácil comprobar, por ejemplo, que el vector dirección de la recta es perpendicular a los vectores característicos de los planos.

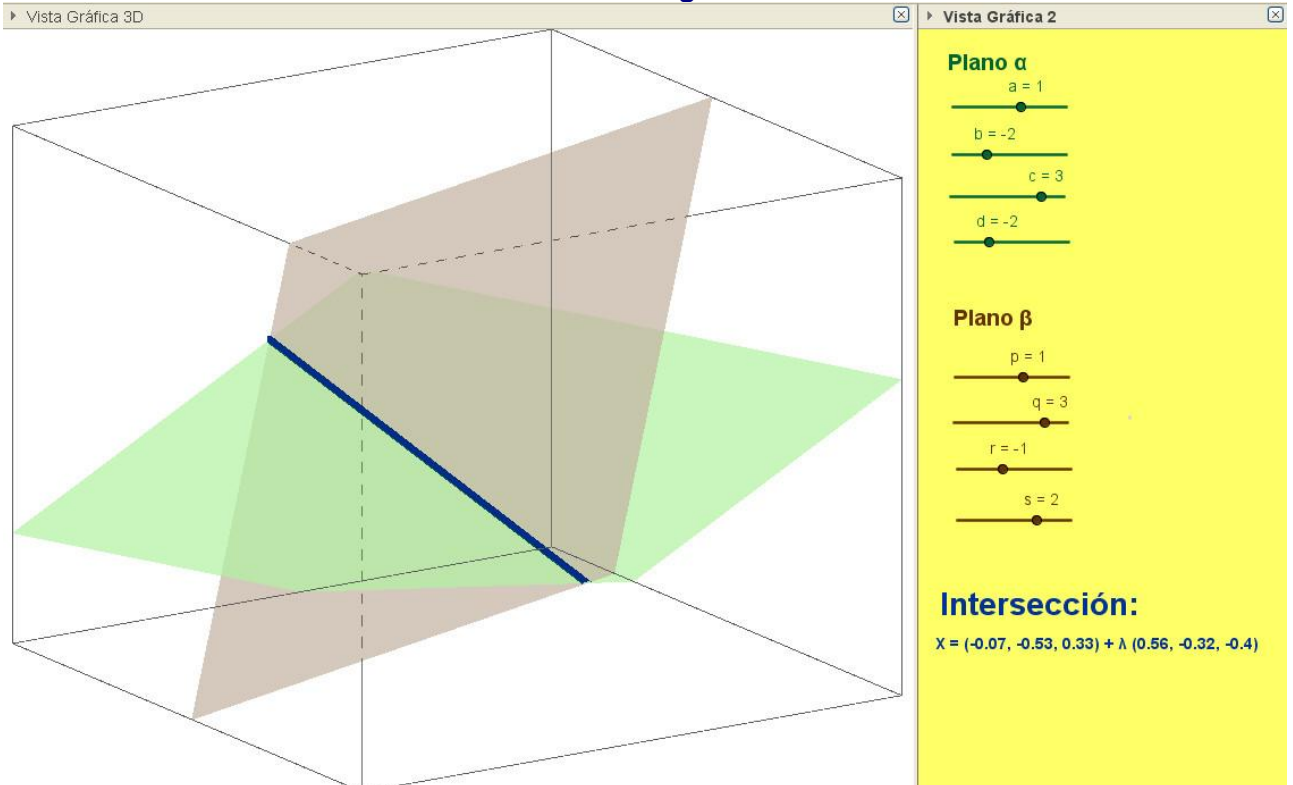


Imagen 4: Posición relativa de dos planos

Puede hacerse una construcción igual con tres planos, aunque en ese caso hay que tener mucho más cuidado con los coeficientes de los planos y hay que mover más la vista gráfica 3D para apreciar bien el resultado de la posición relativa de los tres.

### Volumen de un tetraedro

Para terminar quisiera presentar un capricho en el que me embarqué en los días que le daba vueltas a la idea de presentar esta comunicación. Uno de los actos de fe que suelen hacer mis alumnos de bachillerato es creerse que el volumen de un tetraedro construido sobre tres vectores es la sexta parte del volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores, que vemos al trabajar con el producto mixto en la parte de Geometría Analítica.

Una vez encontré en un mercadillo un puzzle en el que se puede apreciar esa propiedad y a veces he utilizado una construcción de papiroflexia con la división de un cubo en cuatro tetraedros sobre las aristas del cubo y un tetraedro regular interior, que aprendí en un taller de mis amigas gallegas Alicia, Covadonga y Teresa. Pero no parecía quedar muy clara la relación. Por eso, me picaba la curiosidad sobre como podría utilizarse el Geogebra 5 para demostrar que el volumen de un cubo es seis veces el del tetraedro que se construye desde un vértice a los tres vértices más cercanos.

Basta dibujar con cuidado las divisiones para encontrarse con una vista como la de la imagen 5. Como el tetraedro interior no es posible dividirlo en dos tetraedros iguales de los que se obtienen en los picos, es necesario utilizar las medidas para ver que, como tienen igual base (en la figura la cara ACF), al ser las alturas una doble de la otra, el tetraedro regular tiene doble volumen que el irregular.



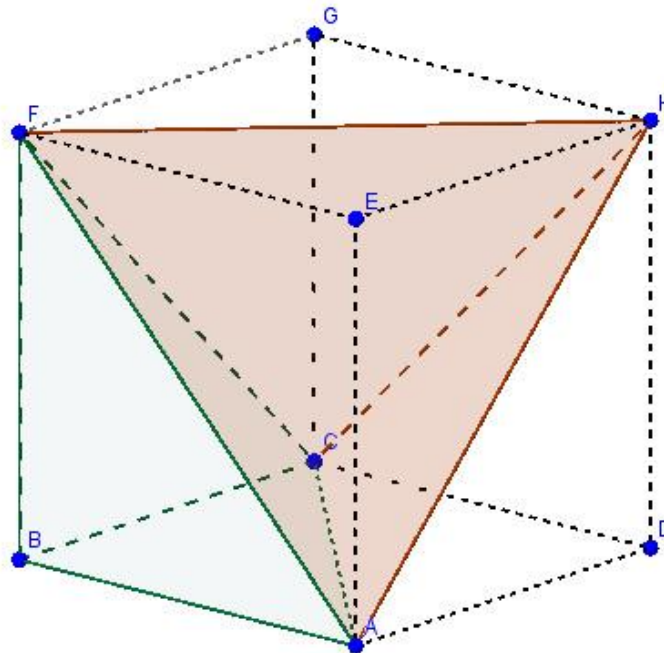


Imagen 5: Volumen de un tetraedro

### Para terminar

Con estas páginas he pretendido únicamente plantear una serie de ejemplos de utilización del geogebra 5 para mostrar a los alumnos propiedades espaciales que, a veces, son complicadas de ver mentalmente. Hay pocos ejemplos de construcciones en las que sea el alumno quien descubra manipulando los objetos dibujados, pero es posible crear muchas más de forma análoga a como se hace en las versiones anteriores de Geogebra o los ejemplos a los que hicimos referencia antes del proyecto Gauss.

También hemos utilizado Geogebra para resolver problemas planteados a los alumnos. Si nos da tiempo haremos referencia durante la comunicación a alguno de ellos. Por poner un ejemplo, hemos resuelto una tarea en la que los alumnos del bachillerato para adultos a distancia debían diseñar un embase de un litro cuya forma sería como la de la imagen 6. Como este ejemplo lo presentaremos Jesús Fernández y un servidor en otra comunicación dentro de unos días, no la incluyo aquí aunque puede consultarse en la bibliografía.

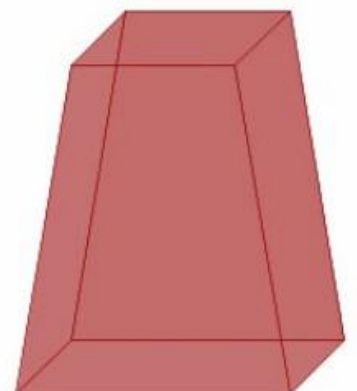


Imagen 6: Diseño de embase



## Bibliografía

Fernández Domínguez, Jesús y Muñoz Santonja, José: "Diseño de un embase con Geogebra 3D". *Actas del II Encuentro en Andalucía. Geogebra en el aula*. Córdoba, 2013

# SOCIEDAD DE LA INFORMACION

[www.sociedadelainformacion.com](http://www.sociedadelainformacion.com)

Edita:



Director: José Ángel Ruiz Felipe

Jefe de publicaciones: Antero Soria Luján

D.L.: AB 293-2001

ISSN: 1578-326x