Estrellas y copos de nieve: dos actividades para trabajar la trigonometría y los números complejos en la asignatura de Matemáticas I.

Elena Gajate Paniagua. Licenciada en Matemáticas y profesora de Enseñanza Secundaria en el IES Mº Juan de Ávila, de Ciudad Real. elenagajate@gmail.com

Página web: https://sonmatematicasnocuentas.weebly.com/

Se presentan dos actividades de trigonometría y números complejos respectivamente para realizar en 1º de bachillerato científico. La primera consiste en elaborar "copos de nieve" recortando papel para sacar conclusiones sobre polígonos regulares, ángulos y triángulos y utilizando los teoremas aprendidos en este curso. La segunda se realiza en el aula de ordenadores y utiliza las propiedades de las operaciones con números complejos. El hilo conductor de ambas son las figuras de estrellas que resultan, por lo que puede ser adecuado realizarlas al final del primer trimestre, justo antes de navidad.

1. La actividad de recortar papel haciendo primero dobleces para formar "copos de nieve" es interesante desde los primeros cursos de la ESO, ya que permite estudiar de una forma divertida la simetría y los giros, los polígonos regulares y sus ángulos centrales, etc. además de transmitir que las matemáticas también implican belleza y creatividad.

Imagen: https://www.itsalwaysautumn.com/cut-snowflake-video-tutorial-free-templates.html

Conseguir hacer estrellas de 4 u 8 puntas es trivial. Las de 6 o 12 ya no tanto, aunque es fácil razonar por qué el ángulo obtenido con este pliegue es de 60º:

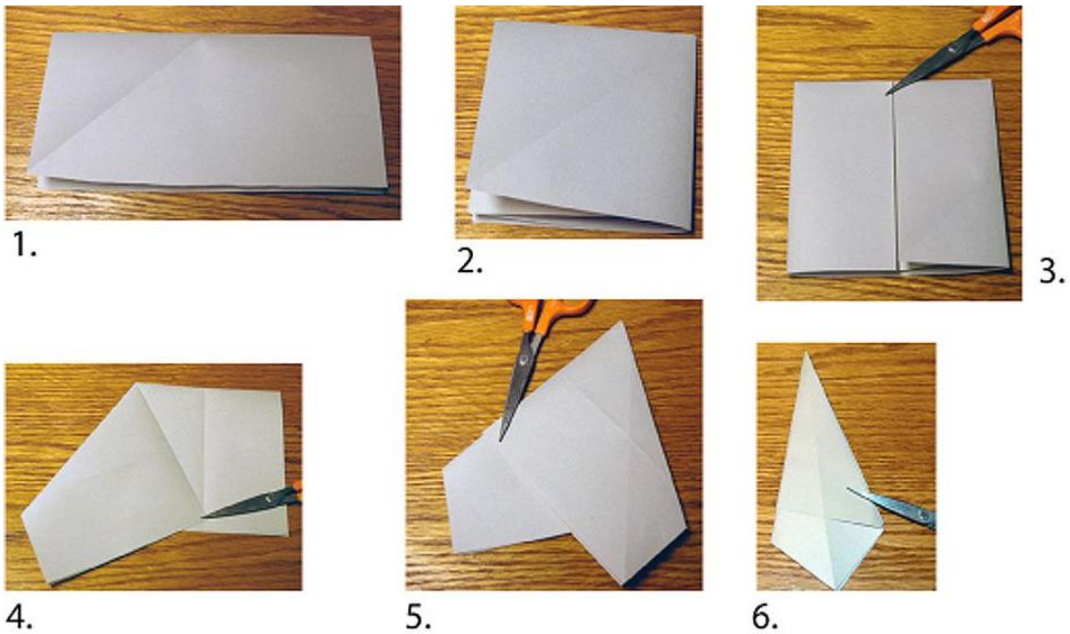


Imagen:https://www.thespruce.com/cutting-snowflakes-from-paper-or-fabric-2821550

El pliegue que permite hacer estrellas de 5 o 10 puntas no es desde luego fácil de deducir. En los libros especializados en papiroflexia o en internet se pueden encontrar instrucciones para hacerlo y que dan lugar a bellas figuras con simetría pentagonal.

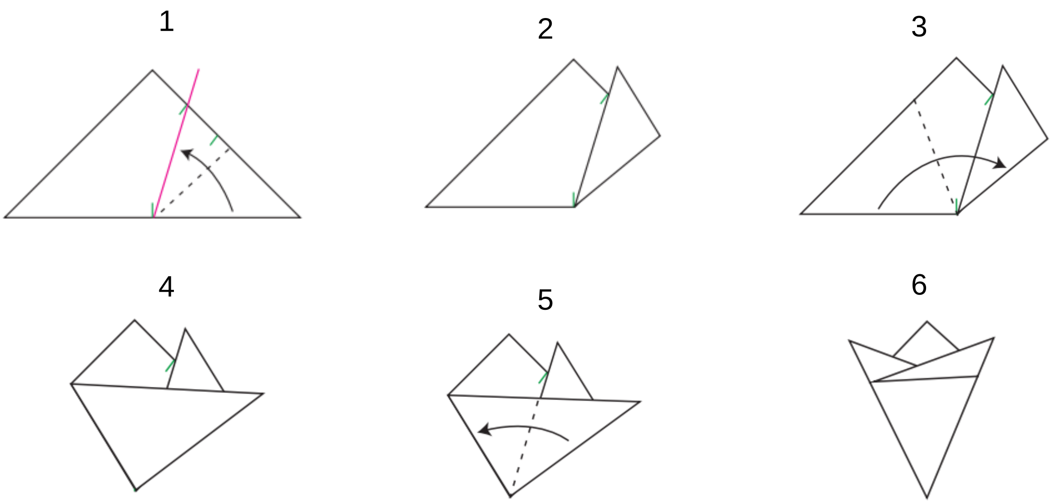
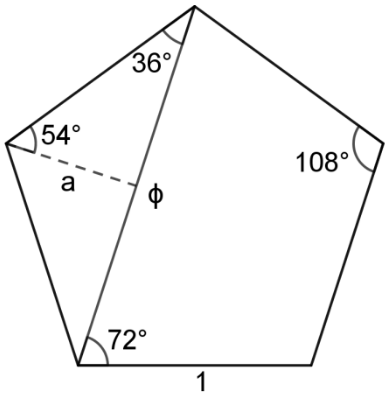


Imagen: http://www.jessicajonesdesign.com/downloads/five_point_snowflake.pdf

Si con este pliegue obtenemos una estrella de 5 puntas debería ser porque el ángulo señalado en el primer pliegue mide 72º. ¿Por qué sucede esto? ¿Aparece por aquí de alguna manera misteriosa la proporción áurea?

Recordemos que las razones de los ángulos de 72º, 36º, 54º, 108º, etc. se pueden obtener de los triángulos que aparecen en el pentágono regular. Si tomamos como unidad el lado, sabemos que la diagonal mide el número de oro Φ, por lo que utilizando el teorema de Pitágoras y las fórmulas trigonométricas que se han estudiado en este curso, se tiene:

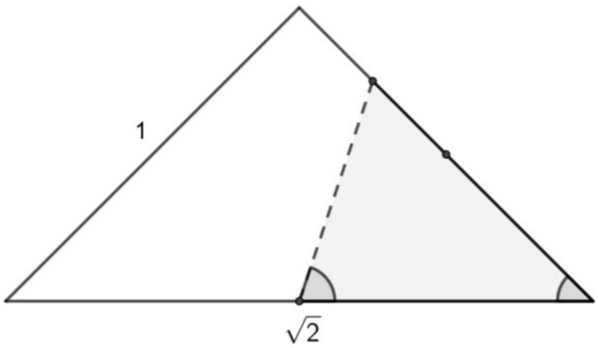


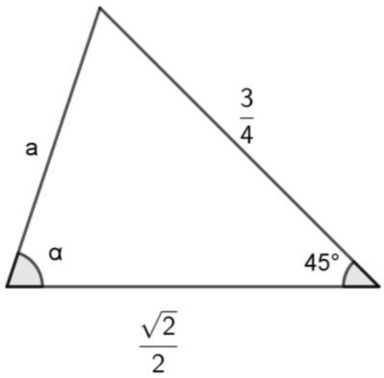
$$\text{sen } 36° = \text{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{\Phi}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos 36° = \frac{\Phi}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{sen } 72° = 2 \text{ sen } 36° \cos 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Vamos a ver ahora si el ángulo que se obtiene con el pliegue que estamos trabajando es efectivamente 72º; para ello debemos resolver el triángulo en el que aparece, tomando como unidad el lado del cuadrado de partida:





Por el teorema del coseno:

$$\text{a}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cos 45° = \frac{1}{2} + \frac{9}{16} - \frac{3}{4} = \frac{5}{16} \Rightarrow \text{a} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Por el teorema de los senos:

$$\frac{\text{a}}{\text{sen } 45°} = \frac{3/4}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Claramente el resultado obtenido no es el seno de 72º (se puede pedir a los alumnos que lo comprueben elevando ambos números al cuadrado). Si buscamos con la calculadora el arco cuyo seno es el valor encontrado, obtenemos 71,57º, que es una aproximación muy aceptable, pero aproximación al fin y al cabo.

2. Los números complejos no deberían estudiarse sólo como objetos puramente aritméticos o algebraicos: su representación gráfica como vectores nos permite “ver” las operaciones que realizamos con ellos.

Con Geogebra podemos representar los número complejos, bien introduciéndolos en la barra de entrada en forma binómica, o bien, como haremos en esta práctica, dibujando su afijo con el puntero (para así poder luego moverlo), y después eligiendo “número complejo” en propiedades>álgebra>coordenadas. El vector también podemos dibujarlo con el puntero o introduciendo en la barra de entrada vector[punto]. Para esta actividad es conveniente tener activada la cuadrícula de coordenadas polares, ya que así controlaremos mejor el módulo y el argumento del número introducido.

Cuando elevamos un número complejo A de argumento α a una potencia n el vector gira $(n-1)\alpha$ y se alarga o acorta según fuera su módulo mayor o menor que la unidad. Utilizando el comando “secuencia[<expresión>, <variable>, <valor inicial>, <valor final>]”, y escribiendo en “expresión” vector[A^n], podemos ver de forma simultánea n potencias del número. En los ejemplos que se muestran se ha tomado n desde 1 hasta 50 ó 100 para representar las primeras potencias de un número de módulo ligeramente superior o inferior a 1. Cambiando el módulo y el argumento del número inicial (en amarillo, con el vector en negro) se obtienen caracolas y estrellas que llaman la atención por su regularidad y belleza a la vez que permiten reflexionar sobre lo que estamos haciendo cuando operamos con estos números.