Algebra, geometría y análisis en Babilonia. Jesús Ruiz Felipe. Centro de Profesores de Albacete.

En la historia del álgebra se suelen distinguir, aunque con matices, varios periodos. Remontando en el tiempo, estos serían:

- Álgebra simbólica, en el que se manejan símbolos tanto para la incógnita como para las operaciones y relaciones.
- Álgebra sincopada, se comenzaron a utilizar símbolos para representar la incógnita y las operaciones elementales. representada por la Aritmética de Diofanto (s. III d.C.) en que los tratados siguen escritos en idioma vernáculo, pero con algunos términos técnicos escritos mediante abreviaturas.
- Álgebra retórica, en el que todas las expresiones se escribían utilizando la lengua común. Son los textos de Euclides, Apolonio y Arquímedes, entre otros.
- *Algebra diagramática* o *álgebra geométrica* cuyo origen se remonta, como se verá más adelante, a la época de Babilonia (entre 2000 y 1600 a. C) y fue dada a conocer por Euclides en el libro II de los Elementos. Se opera con diagramas para obtener resolución de ecuaciones, aunque en el caso de Mesopotamia sólo ha llegado ha perdurado el texto retórico. Los escritos se redactan en lenguaje ordinario

Jens Høyrup ha investigado los textos babilónicos vinculando una ilustración geométrica a cada problema supuestamente algebraico utilizando el método de análisis para resolver problemas. La consecuencia es dejar de percibirlos como textos que tratan sobre números y propiedades aritméticas, para mostrarlos como textos geométricos, que, a la manera posterior de Euclides resuelven ecuaciones, en particular las de 2º grado

Ecuaciones de 2º grado

Sea un rectángulo de lados a y b que tomaremos como incógnitas. Los datos son el semiperímetro y el área (asa). Hallar la longitud y la altura, us y sag.

$a.b = c_1$
$a + b = c_2$
Las condiciones equivalen a una ecuación de este tipo:

$a^2 - c_2 a + c_1 = 0$

La técnica geométrica corresponde a realizar los siguientes pasos:

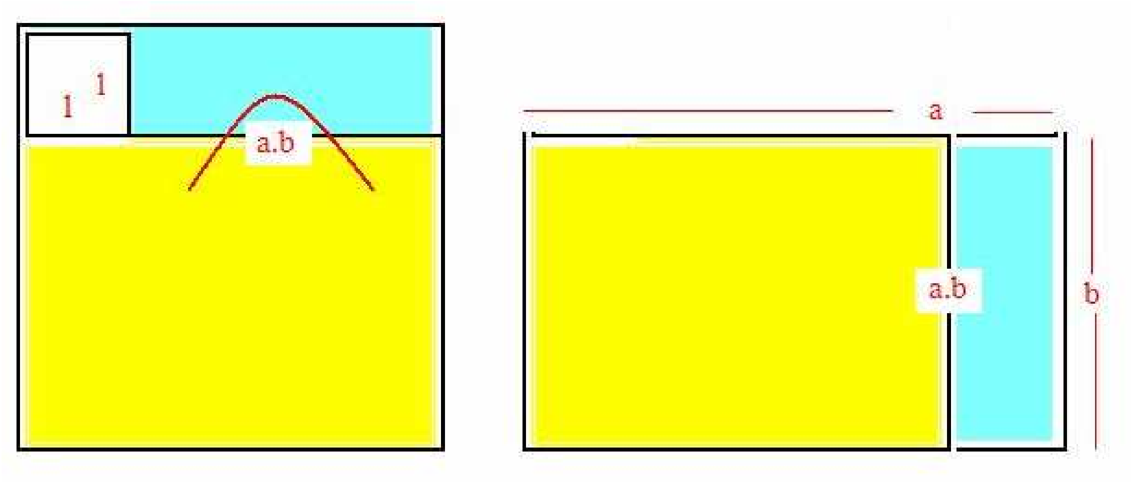
1) Construir un cuadrado de lados (a+b)/2

2) Restarle un cuadrado menor de lado l

3) Suponemos el problema resuelto, es decir la resta de los dos cuadrados es el área pedida:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - l^2 = (\left(\frac{a+b}{2}\right) + l).(\left(\frac{a+b}{2}\right) - l)$$

4) “Recortando y pegando” (literalmente, con un editor de imágenes) obtenemos el rectángulo deseado. Los matemáticos de Babilonia empleaban el uso de de las figuras cuadradas y rectangulares, utilizaban la técnica de cortar y pegar y usaban tablas para obtener las raíces y obtener soluciones



Si partimos de los datos área= 48; a+b= 14, construiremos un cuadrado de lado 7 y por tanto l=1

$$a = (\left(\frac{a+b}{2}\right) + l)$$
$$b = (\left(\frac{a+b}{2}\right) - l)$$

La clave está en el paso 3: Suponer que el área dibujada es el área pedida. El matemático hace uso del análisis para completar el camino entre las premisas y la conclusión y construir sus pruebas.

YBC 6967 [Høyrup 1990a: 262–266].

<table>
<tr><td rowspan="2">Obverse
1. The igibûm over the igûm 7 goes beyond
[IGI.B]I e-li IGI 7 i-ter
2. igûm and igibûm what?
[IGI] ù IGI.BI mi-nu-um
3. You, 7 which the igibûm
a[t-t]a 7 ša IGI.BI
4. over the igûm goes beyond
UGU IGI i-te-ru
5. to two break: 3°30´;
a-na ši-na hi-pí-ma 3,30
6. 3°30´ together with 3°30´
3,30 it-ti 3,30
7. make hold each other: 12°15´.
šu-ta-ki-il-ma 12,15
8. To 12°15´ which comes up for you
a-na 12,15 ša i-li)-a∗-kum
9. 1` the surface append: 1`12°15´.
[1 A.ŠAl]a-am sí-ib-ma 1,12,15
10. The equilateral of 1`12°15´ what? 8°30´.
[ÍB.SI8 1],12,15 mi-nu-um 8,30
11. 8°30´ and 8°30´, its counterpart, lay down.
[8,30 ù] 8,30 me-he-er-šu i-di-ma</td><td>Reverse
1. 3°30´, the made-hold,
3,30 ta-ki-il-tam
2. from one tear out,
i-na iš-te-en ù-su-uh
3. to the other append.
a-na iš-te-en sí-ib
4. The first is 12, the second is 5.
iš-te-en 12 ša-nu-um 5
5. 12 is the igibûm, 5 is the igûm
12 IGI.BI 5 i-gu-um</td></tr>
<tr><td>Calcula la mitad de 7, es decir 3;30 (sexagesimal), lo eleva al cuadrado para obtener 12;15. A esto suma 1,0 para obtener 1,12;15. Halla su raíz cuadrada a partir de una tabla de cuadrados, obteniendo 8;30. De esto resta 3;30, obteniendo 5 para el ancho del rectángulo</td></tr>
</table>

Se obtiene la raíz positiva de la ecuación cuadrática, que es la que tendría sentido práctico en la resolución de problemas ideados por los calculadores. Los problemas que llevaban a los Babilonios a estas ecuaciones, con frecuencia, se referían al área de un rectángulo y a la diferencia de sus lados. Las instrucciones escritas inducen a construir una figura geométrica.

Sea un rectángulo de lados a y b que tomaremos como incógnitas. Los datos son la diferencia de lados (The *igibûm* over the *igûm* 7 goes beyond) y el área. Hallar los lados:

a.b =60 (1 en notación sexagesimal)

$a - b = 7$

Las condiciones equivalen a una ecuación cuadrática de este tipo*:*

$b^2 + 7.b = 60; b.(b+7)= 60$

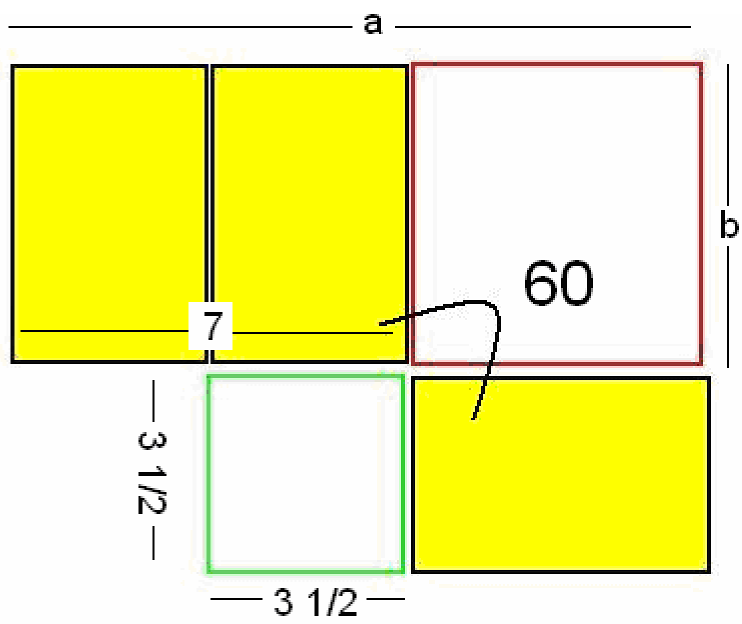
La técnica geométrica sugiere realizar los siguientes pasos:

1) Construir un rectángulo de lados a y b, cuyo área es 60 (esta sería la parte analítica del problema)

2) Dividir la diferencia de lados entre dos.

El enunciado viene en notación sexagesimal. Por comodidad escribimos 7/2= 3.5 (decimal). Los babilonios tenían un sistema numérico de base 60, en lugar de 10. Además se ayudaban de tablas para facilitar el cálculo.

3) Cortando y pegando formamos un cuadrado de $60+3{,}5^2=72{,}25$ (1`12°15), -en notación decimal- donde cada lado será de 8,5 y el problema queda resuelto de esta manera al calcular a y b.



Las operaciones con líneas y áreas son en esencia un álgebra geométrica, que utiliza métodos analíticos donde las incógnitas se simbolizan mediante segmentos y áreas. En el proceso de construcción de figuras, hay una parte analítica, en el sentido clásico del término: se trata lo que se busca como si ya hubiese sido hallado, y a partir de aquí se remonta a las condiciones iniciales hasta encontrar que todas las variables involucradas son datos conocidos.

BM 13901 Høyrup 1990

Obv. I

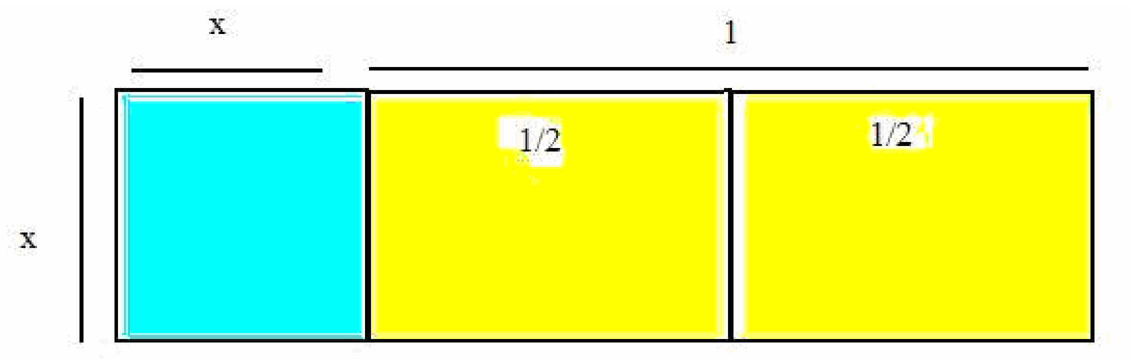
1. The surface and my confrontation I have accumulated: 45´ is it.1, the projection,
A.ŠÀl[*am*] *ù mi-it-har-ti ak-m*[*ur-m*]*a* 45-E 1 *wa-si-tam*
2. you posit. The moiety of 1 you break, 30´and 30´ you make hold each other.
ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 *te-he-pe* [3]0 *ù* 30 *tu-uš-ta-kal*
3. 15´ to 45´ you append: 1 makes 1 equilateral.
30´ which you have made hold
15 *a-na* 45 *tu-sa-ab-ma* 1-[E] 1 ÍB.SI8 30 *ša tu-uš-ta-ki-lu*
4. in the inside of 1 you tear out: 30´ the confrontation.

lìb-ba 1 *ta-na-sà-ah-ma* 30 *mi-it-har-tum*

En la misma línea que el problema anterior traducimos en notación algebraica decimal:

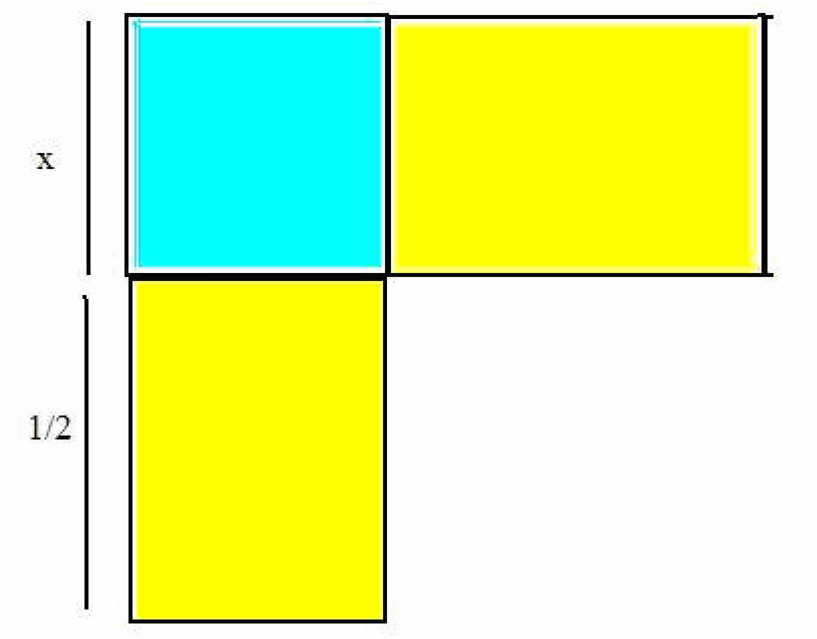
x.(x+1)=0.75.

1)



Cortando y pegando, obtenemos:

2)



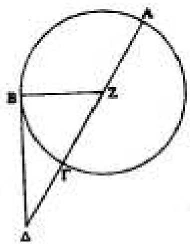
Escribamos la ecuación como x (x+a) = b^2

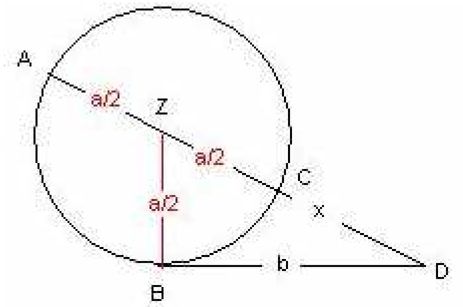
Del cuadrado deducimos que: $(x+\frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2 + b^2$

En este caso $(x + 0.5)^2$ = 0.25 + 0.75 por tanto x= 0.5

En un inciso indicaremos que a partir de la proposición 36 del libro III de los Elementos de Euclides, mediante la figura geométrica dibujada se resolvería la misma ecuación cuadrática;

Proposición 36. *Si se determina un punto exterior a un círculo y del punto al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta al círculo y la otra le toca, el rectángulo comprendido por la secante entera y la parte exterior determinada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente.*





Si en la figura del texto aplicamos dicha proposición se tiene que:

DC .DA= BD$^2 \Rightarrow x.(a+x) = b^2$

Además (aplicando el teorema de Pitágoras): $(\frac{a}{2})^2 + b^2 = (x + \frac{a}{2})^2$ y se llega al mismo punto que los babilonios,

SOCIEDAD DE LA INFORMACION

www.sociedadelainformacion.com

Edita:

Director: José Ángel Ruiz Felipe
Jefe de publicaciones: Antero Soria Luján
D.L.: AB 293-2001
ISSN: 1578-326x