

Los orígenes del análisis. Jesús Ruiz Felipe. Profesor de Física y Química.

Hipócrates de Quíos (1) (siglo V a. C.) es el autor de los primeros *Elementos*, el intento original de desplegar el acervo matemático desde unos principios conocidos. La expresión elemento simbolizaba aquello a partir de lo que se construye algo. Estos elementos fueron empañados por los de Euclides, que hacia el año 300 a. C. se postularon como modelo de enseñar el conocimiento matemático a partir de nociones comunes y definiciones. A partir de los primeros *Elementos* se acentuó la separación entre diseño de figuras y la demostración de teoremas. También la diferencia entre análisis y síntesis. La síntesis fue el modo de exposición del saber matemático: partiendo de los principios establecidos se obtenía la hipótesis a verificar. El análisis (cuya creación la atribuye Proclo a Hipócrates, y que sería reivindicado por Platón en la República), se basa en suponer resuelto el problema y retrotraer consecuencias que nos lleven hasta los principios que permitan probar que esa solución es condición suficiente y necesaria. El análisis en el sentido clásico de reducir un problema hacia otro ya conocido se aplicaba antes que Platón, aunque este tuvo la virtud en completar la técnica del análisis con la síntesis, que consiste en el modo inverso.

La filosofía de Platón se sustenta en la teoría de las formas. Esta doctrina presenta a los seres naturales como copias de modelos ajenos a la Naturaleza. Cada colección de seres naturales similares, que advertimos mediante los sentidos debe su existencia y sus características a su forma modelo, advertida mediante la razón. En la *República*, se traza una división entre seres sensibles e inteligibles, que son de dos clases: las formas y los entes matemáticos, como números y figuras. Esto da lugar a dos tipos de conocimiento: la dialéctica, que se asienta en la comprensión de las formas, y las matemáticas. Existen muchas evidencias del valor concedido por Platón a la geometría como disciplina propedéutica: el célebre *nadie entre en mi habitación sin saber geometría*.

Sobre los objetos tangibles que percibimos a través de los sentidos y que se modifican incesantemente no es viable el conocimiento verdadero; este se ocupa de las ideas abstractas, que perviven autónomamente y que son el modelo de los objetos perceptibles. Las matemáticas son ajenas a la experiencia, eternas y revelan una realidad imperturbable, más real que la tramposa naturaleza sensible. Sin embargo, la superioridad de la dialéctica radica en que justifica todos sus principios, mientras que las matemáticas se basan en postulados incuestionables. Ese es el punto débil de las matemáticas, que por otra parte interpretan un papel conciliador entre las formas y los entes naturales. Son una abstracción, no son un instrumento válido para la descripción de un mundo mutable e imperfecto. Las entidades perceptibles son toscas réplicas de las formas, ase-

quibles a la parte intelectual del alma. El mundo sensible se divide en dos partes: los objetos apreciados por los sentidos y las imágenes de esos objetos. República:

510 a Toma, pues, una línea que esté cortada en dos segmentos desiguales y vuelve a cortar cada uno de los segmentos, el del género visible y el del inteligible, siguiendo la misma proporción. Entonces tendrás, clasificados según la mayor claridad u oscuridad de cada uno: en el mundo visible, un primer segmento, el de las imágenes. Llamo imágenes ante todo a las sombras y, en segundo lugar, a las figuras que se forman en el agua y en todo lo que es compacto, pulido y brillante y a otras cosas semejantes, si es que me entiendes.

-Sí que te entiendo.

-En el segundo pon aquello de lo cual esto es imagen: los animales que nos rodean, todas las plantas y el género entero de las cosas fabricadas.

-Lo pongo -dijo.

b -¿Accederías acaso -dije yo- a reconocer que lo visible se divide, en proporción a la verdad o a la carencia de ella, de modo que la imagen se halle, con respecto a aquello que imita, en la misma relación en que lo opinado con respecto a lo conocido?

-Desde luego que accedo -dijo.

-Considera, pues, ahora de qué modo hay que dividir el segmento de lo inteligible.

-¿Cómo?

-De modo que el alma se vea obligada a buscar la una de las partes sirviéndose, como de imágenes, de aquellas cosas que antes eran imitadas, partiendo de hipótesis y encaminándose así, no hacia el principio, sino hacia la conclusión; y la segunda,

partiendo también de una hipótesis, pero para llegar a un principio no hipotético y llevando a cabo su investigación con la sola ayuda de las ideas tomadas en sí mismas y sin valerse de las imágenes a que en la búsqueda de aquello recurría.

-No he comprendido de modo suficiente -dijo- eso de que hablas.

-Pues lo diré otra vez -contesté-. Y lo entenderás mejor después del siguiente preámbulo. Creo que sabes que **quienes se ocupan de geometría, aritmética y otros estudios similares dan por supuestos los números impares y pares, las figuras, tres clases de ángulos y otras cosas emparentadas con éstas y distintas en cada caso; las adoptan como hipótesis, procediendo igual que si las conocieran, y no se creen ya en el deber de dar ninguna explicación ni a sí mismos ni a los demás con respecto a lo que consideran como evidente para todos, y de ahí es de donde parten las sucesivas y consecuentes deducciones que les llevan finalmente a aquello cuya investigación se proponían.**

d

e

-Sé perfectamente todo eso -dijo.

-¿Y no sabes también que se sirven de figuras visibles acerca de las cuales discurren, pero no pensando en ellas mismas, sino en aquello a que ellas se parecen, discurrendo, por ejemplo, acerca del cuadrado en sí y de su diagonal, pero no acerca del que ellos dibujan, e igualmente en los demás casos; y que así, las cosas

511a

modeladas y trazadas por ellos, de que son imágenes las sombras y reflejos producidos en el agua, las emplean, de modo que sean a su vez imágenes, en su deseo de ver aquellas cosas en sí que no pueden ser vistas de otra manera sino por z medio del pensamiento?

-Tienes razón -dijo.

-Y así, de esta clase **de objetos decía yo que era inteligible, pero que en su investigación se ve el alma obligada a servirse de hipótesis y, como no puede remontarse por encima de éstas, no se encamina al principio, sino que usa como imágenes aquellos mismos objetos, imitados** a su vez por los de abajo, que, por comparación con éstos, son también ellos estimados y honrados como cosas palpables.

b -Ya comprendo -dijo-; te refieres **a lo que se hace en geometría y en las ciencias afines a ella.**

-Pues bien, aprende ahora que situó en el segundo segmento de la región inteligible aquello a que alcanza por sí misma la razón valiéndose del poder dialéctico y considerando las hipótesis no como principios, **sino como**

c **verdaderas hipótesis, es decir, peldaños y trampolines que la eleven hasta lo no hipotético, hasta el principio de todo; y una vez haya llegado a éste, irá pasando de una a otra de las deducciones que de él dependen hasta que de ese modo descienda a la conclusión sin recurrir en absoluto a nada sensible,** antes bien, usando solamente de las ideas tomadas en sí mismas, pasando de una a otra y terminando en las ideas.

d -Ya me doy cuenta -dijo-, aunque no perfectamente, pues me parece muy grande la empresa a que te refieres, de que lo que intentas es dejar sentado que es más clara la visión del ser y de lo inteligible que proporciona la ciencia dialéctica que la que proporcionan las llamadas artes, a las cuales sirven de principios las **hipótesis; pues, aunque quienes las estudian se ven obligados a contemplar los objetos por medio del pensamiento y no de los sentidos, sin embargo, como no investigan remontándose al principio, sino partiendo de hipótesis, por eso te parece a ti que no adquieren conocimiento de esos objetos que son, empero, inteligibles cuando están en relación con un principio. Y creo también que a la operación de los geómetras y demás la llamas pensamiento, pero no conocimiento, porque el pensamiento es algo que está entre la simple creencia y el conocimiento.**

e -Lo has entendido -dije- con toda perfección. Ahora aplícame a los cuatro segmentos estas cuatro operaciones que realiza el alma: la inteligencia, al más elevado; el pensamiento, al segundo; al tercero dale la creencia y al último la imaginación; y ponlos en orden...

Para Platón, en las matemáticas se aplica el método deductivo descendente desde unas premisas hacia las conclusiones: *el alma obligada a servirse de hipótesis y, como no puede remontarse por encima de éstas, no se encamina al principio, sino que usa como imágenes aquellos mismos objetos, imitados a su vez por los de abajo, que, por comparación con éstos, son también ellos estimados y honrados como cosas palpables*

Se parte de hipótesis que se toman como verdades conocidas sin cuestionarlas y sin necesidad de rendir cuentas a nadie de su veracidad y existencia, entelequias entendidas como los números o los ángulos. Hipótesis significa, en este caso, un enunciado que sirve como punto de partida o condición para avanzar hacia otro. No es una suposición que se exponga a examen.

Creo que sabes que quienes se ocupan de geometría, aritmética y otros estudios similares dan por supuestos los números impares y pares, las figuras, tres clases de ángulos y otras cosas emparentadas con éstas y distintas en cada caso; las adoptan como hipótesis, procediendo igual que si las conocieran, y no se creen ya en el deber de dar ninguna explicación ni a sí mismos ni a los demás con respecto a lo que consideran como evidente para todos, y de ahí es de donde parten las sucesivas y consecuentes deducciones que les llevan finalmente a aquello cuya investigación se proponían. El matemático da por supuestas ciertas nociones, como lo par y lo impar, etc. De estos principios, que no admiten demostración, es de donde inicia su camino deductivo hacia las conclusiones, ruta en la que no vale apoyarse en las ideas puras, sino que ha de recurrir a representaciones materiales de estas ideas. En cambio, el dialéctico parte también de hipótesis, pero estas hipótesis no son para él más que algo provisional, peldaños, o trampolines que la eleven hasta lo no hipotético, hasta el principio de todo; y una vez haya llegado a éste, irá pasando de una a otra de las deducciones que de él dependen hasta que de ese modo descienda a la conclusión sin recurrir en absoluto a nada sensible.

Las matemáticas (*su investigación*) deben ascender, mediante el análisis, hacia la hipótesis. Desde las conclusiones a las premisas. Una vez en el punto más alto (*en su investigación se ve el alma obligada a servirse de hipótesis y, como no puede remontarse por encima de éstas*), invirtiendo el sentido hacia abajo, las matemáticas se enriquecerían averiguando nuevas conclusiones a partir de las premisas establecidas. Platón introdujo la síntesis que verifica el análisis y de esta manera se mejora el método.

Platón recalca que los razonamientos que hacemos en Geometría no se refieren a las figuras concretas que dibujamos sino a las ideas absolutas que ellas representan: *figuras visibles acerca de las cuales discurren, pero no pensando en ellas mismas, sino en aquello a que ellas se parecen, discurrendo, por ejemplo, acerca del cuadrado en sí y de su diagonal, pero no acerca del que ellos dibujan, e igualmente en los demás casos; y que así, las cosas modeladas y trazadas por ellos, de que son imágenes las sombras y reflejos producidos en el agua, las*

El análisis definido por Pappo de Alejandría.

Algunos métodos heurísticos son aplicados por los matemáticos griegos desde Hipócrates. La idea de heurística como la ciencia del descubrimiento se le atribuye a Pappo (siglo III d.c.), quien propone la rama de estudio denominada "*analyomenos*", o "el tesoro del análisis". Pappo propone que para resolver problemas en geometría se puede asumir que la solución está dada y se trabaja hacia atrás hasta encontrarse que se sabe verdadero. Yendo hacia adelante: desde axiomas y premisas probadas, se desciende hacia el resultado. A estos dos métodos se les denomina *análisis* y *síntesis* respectivamente.

En el libro VII Pappus (colección matemática) escribe sobre *El Tesoro del Análisis*

El llamado "Tesoro del Análisis", mi querido Hermodoro, tiene, en parte, un cuerpo de doctrina equipada por el uso de aquellos que después de ir a través de los elementos comunes, desean obtener poder para resolver los problemas presentados a ellos sobre curvas y sólo es útil con este propósito. Es el trabajo de tres hombres, Euclides el escritos de "Elementos", Apolonio de Perga y Aristeo el mayor, que prosiguieron con el método de análisis y síntesis.

En realidad este elenco de sabios está incompleto sin la figura de Arquímedes.

Pappus continúa con su disertación del análisis y la síntesis, el análisis era usado en aquellos fragmentos donde los geómetras se ocupaban de estudiar las cónicas y otras curvas algebraicas es decir, la matemática más compleja. Sin embargo, el análisis tenía el defecto de ser dependiente de la consideración de las figuras sin llegar a exhibir un carácter autónomo.

El análisis es un camino que parte de tomar lo que se investiga como cosa aceptada mediante sus consecuencias hasta llegar a la síntesis. En el análisis, suponiendo que lo investigado ya se ha producido, observamos por qué sucede y vamos de nuevo a lo que lo precedió hasta que, haciendo el camino hacia atrás de esta manera, damos con algo de lo ya aceptado o que pertenezca a la clase de los principios. Y a este método lo llamamos análisis porque es una solución camino atrás. Por la otra parte, en la síntesis, partiendo de la marcha atrás, dando por sentado el elemento último captado en el análisis, colocando ahora lo que allí precedía en su orden natural como consecuencias y componiéndolas entre sí llegamos por último a la construcción de lo investigado. Y a eso lo llamamos síntesis.

Pappo distingue entre dos tipos de análisis, el teórico y el denominado de problemas

Hay dos clases de análisis: el que investiga la verdad, al que llamamos 'teórico', y el que pretende llegar a hacer lo propuesto, llamado 'de problemas'. En el tipo teórico. suponiendo que lo investigado existe y es verdad, avanzamos después hacia algo aceptado mediante las consecuencias que se siguen de ello como verdaderas y existen por hipótesis; y si lo aceptado era

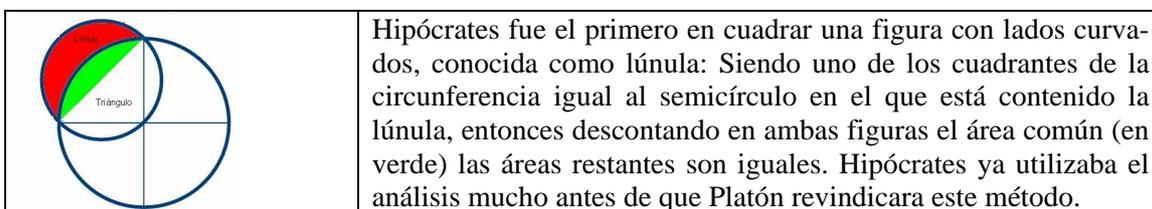
verdadero, será verdadero también lo investigado, pero si nos topamos con que hemos dado por aceptado algo falso, investigado también será falso.

En el análisis de problemas suponemos que el problema planteado es conocido y luego, tomando por verdadero las consecuencias de ello, avanzamos hacia algo aceptado y si lo aceptado es posible y alcanzable, lo que los matemáticos llaman un dato, el problema propuesto será resoluble y de nuevo la demostración será una marcha atrás del análisis pero si nos topamos con que hemos aceptado algo imposible, el problema también será irresoluble.

Papo es un investigador del razonamiento geométrico. Afirma que el análisis es el medio de descubrir resultados y teoremas. La presentación se demuestra mediante la síntesis.

Notas

1)



Bibliografía

PLATÓN Menón, República.

CARATINI, Roger (2004): *Los matemáticos de Babilonia*. Barcelona: Bellaterra

SOCIEDAD DE LA INFORMACION

www.sociedadelainformacion.com

Edita:



Director: José Ángel Ruiz Felipe

Jefe de publicaciones: Antero Soria Luján

D.L.: AB 293-2001

ISSN: 1578-326x