El método demostrativo de Euclides en los Elementos.

Jesús Ruiz Felipe. Profesor de Física y Química. IES Cristóbal Pérez Pastor de Tobarra. Centro de Profesores de Albacete. España.

jesusruiz@sociedadelainforamcion.com

El método deductivo de los "Elementos" de Euclides parte de ciertos axiomas básicos, y a partir de ahí se deducen las verdades de la geometría elemental. Cada proposición en geometría se vincula (por medio de demostraciones) a axiomas previos, definiciones y proposiciones o asunciones primarias, no sujetas a demostración.

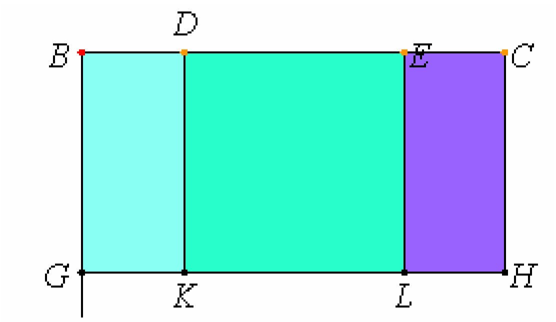
El término Elementos poseía dos significados, (Proclo): “El Elemento se compone de dos modos, porque lo que construye es el elemento de lo construido. También se dice, además, que elemento es lo más sencillo en que se resuelve lo complejo, siendo elementos las cosas más primitivas que se establecen para un resultado”

El Libro II de los Elementos (uno de los más breves, con 14 proposiciones) se construye como un álgebra geométrica análoga en su época al álgebra simbólica. Las proposiciones iniciales versan sobre transformaciones de áreas. En la decimocuarta proposición se explica la manera de hallar un cuadrado cuya área sea igual a la de una figura rectilínea dada. Las once primeras proposiciones de este libro se podrían considerar propiedades algebraicas, si en lugar de segmentos fueran cantidades. Sin embargo las soluciones geométricas preceden a las soluciones algebraicas. Euclides presenta todas estas proposiciones como cuestiones geométricas, como un desarrollo elemental del método de aplicación de áreas. El libro segundo de los *Elementos* de Euclides se denomina “álgebra geométrica.”

Las proposiciones, que han disminuido su importancia con el paso de los siglos y la evolución algebraica tenían antaño una gran trascendencia. El álgebra simbólica ha sustituido a sus equivalentes geométricos euclidianos.

La proposición primera del libro II enuncia *Si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos*:

… BG.(BD + DE + EC) = BG.BD + BG.DE + BG.EC



Es decir, es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

a.(b + c + d) = a.b + a.c + a.d.

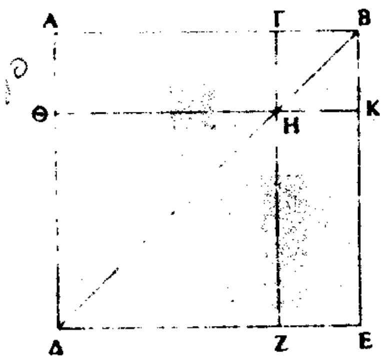
Las magnitudes se representan como segmentos de línea recta obedeciendo a los axiomas y postulados de la geometría.

Proposición 4[1]

Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos [70].

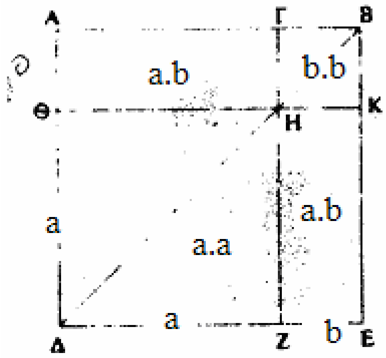
Córtese, pues, al azar la línea ΑΒ en el (punto) Γ.

Digo que el cuadrado de ΑΒ es igual a los cuadrados de ΑΓ, ΓΒ y dos veces el rectángulo comprendido por ΑΓ, ΓΒ.



Pues constrúyase a partir de ΑΒ el cuadrado ΑΔΕΒ [I, 46], y trácese ΒΔ, y por el (punto) Γ trácese ΓΖ paralela a una de las dos (rectas) ΑΔ, ΕΒ, y por el (punto) Η trácese ΘΚ paralela a las dos (rectas) ΑΒ, ΔΕ [I, 31]. Ahora bien, como ΓΖ es paralela a ΑΔ, y ΒΔ ha incidido sobre ellas, el ángulo externo ΓΗΒ es igual al interno y opuesto ΑΔΒ [I, 29]. Pero el (ángulo) ΑΔΒ es igual al (ángulo)

1 EUCLIDES: *Elementos*. Traducción y notas de M.L.Puertas. 3 vols. Gredos, Madrid, 1996

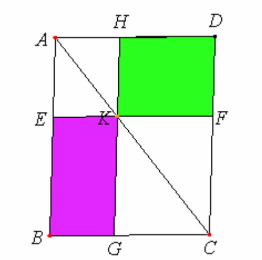


Es decir (a+b).a + (a+b). b= $(a+b)^2$

Porisma: *a partir de esto, queda claro que en las áreas de cuadrados los paralelogramos situados en trono a la diagonal son cuadrados*

A los resultados que se derivan fácilmente de un teorema los llamaron corolarios o porismas. Tales resultados, obtenidos sin mucho trabajo adicional, fueron considerados por Proclo como primas.

O también:



I. 43. *En cualquier paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí.*

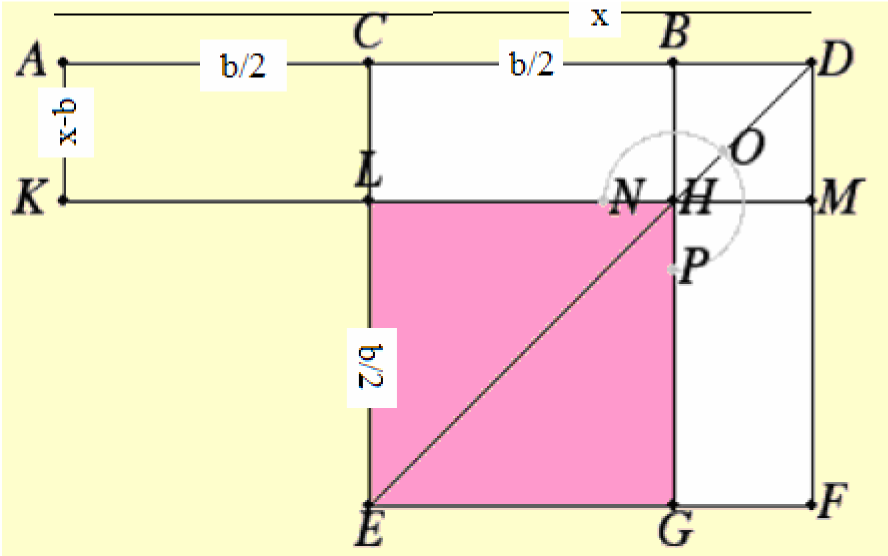
Se deduce en la figura que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b$ es la interpretación geométrica de esta expresión, que es lo que se conoce como el cuadrado de un binomio:

Este un método de trabajo se denomina método de aplicación de áreas.

Proposición 6. *Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta; el rectángulo comprendido por la recta entera con la recta añadida y la recta añadida junto con el cuadrado de la mitad es igual al cuadrado de la recta compuesta por la mitad y la recta añadida*.

La ecuación es $x.(x-b) = c^2$

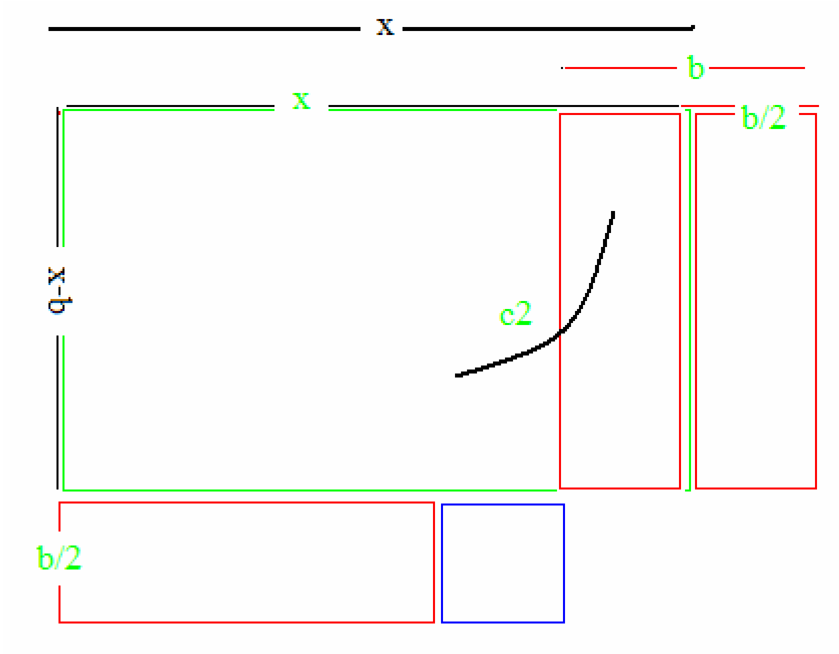
O bien $x.(x-b) = c^2=(x-b/2)^2-(b/2)^2$



Del diagrama se deduce que $c^2 + (b/2)^2 = (x-b/2)^2$

Luego tendremos un cuadrado de lado $\sqrt{c^2 + (b/2)^2} = x - \frac{b}{2}$

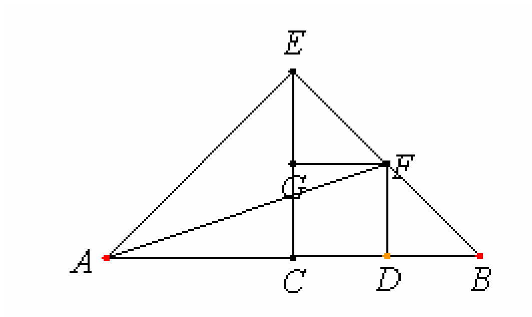
Se trata de pasar de una ecuación de 2º grado a una ecuación más sencilla (primer grado). Este método, de tratar de simplificar un problema a otro más sencillo es la misma técnica que la descrita en el periodo babilónico. Tal vez el geómetra sumerio hubiera optado por este diagrama:



Con un cuadrado igual donde $c^2 + (b/2)^2 = (x-b/2)^2$. Pero en esencia es lo mismo.

Los sumerios resolvían ya este tipo de ecuaciones, probablemente ayudados en diagramas auxiliares, por tanto se considera las proposiciones del libro II son un álgebra en forma geométrica, y que estas técnicas fueron adquiridas por los helenos de los babilonios. Los matemáticos griegos considerarían una traducción geométrica que les permitía formular los problemas de manera general y no, como en Babilonia, en problemas numéricos determinados concernientes a contextos pragmáticos como la medida de una finca; y alcanzar demostraciones generales mientras que en Babilonia se dictaban instrucciones para encontrar las soluciones particulares. Esta es, en esencia, una de las grandes diferencias, donde los helenos son teóricos, los asiáticos se limitaban a cuestiones numéricas concretas, aunque muchos de sus problemas siguen un patrón. Pero esta posible diferencia entre cuestiones aritméticas y geométricas, comparten en realidad métodos comunes, procedimientos que conciernen a un álgebra, aritmética y geometría no independientes.

Proposición 9. *Si se corta una línea recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de los segmentos desiguales de la recta entera son el doble del cuadrado de la mitad más el cuadrado de la recta situada entre los puntos de sección*

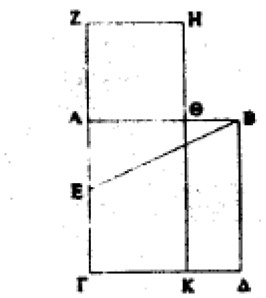


Los enunciados y las demostraciones son geométricos.

Otras construcciones o problemas que aparecen en los *Elementos* corresponden, desde el punto de vista algebraico, a la solución de ecuaciones de segundo grado.

Proposición 11. (Problema) Dividir una recta de tal forma que el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento que queda.

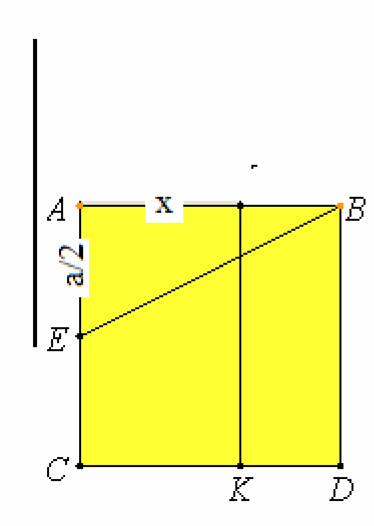
Es decir: x^2=a.(a-x)

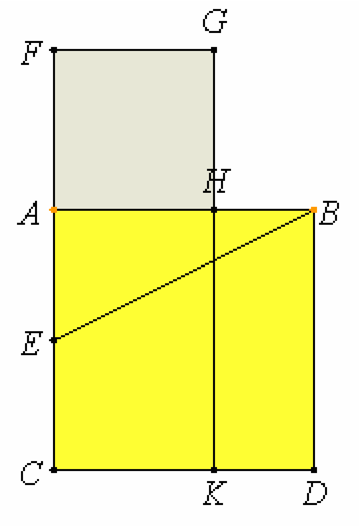


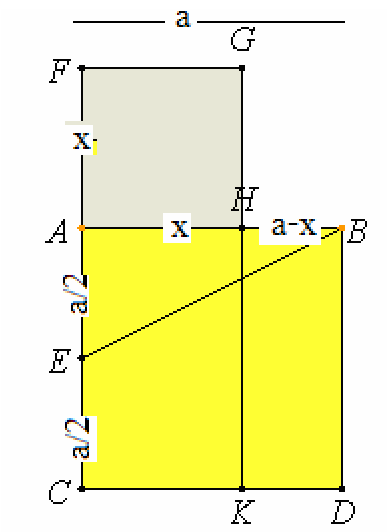
Pues constrúyase a partir de AB el cuadrado ABΔΓ [I, 46] y divídase en dos AΓ por el punto E y trácese BE y prolónguese ΓA hasta Z, y hagáse EZ igual a BE, y constrúyase a partir de AZ el cuadrado ZΘ, y prolónguese HΘ hasta K.

Digo que AB ha sido cortada en Θ, de modo que hace el rectángulo comprendido por AB, BΘ igual al cuadrado AΘ.

Parece que Euclides tiene la solución en la cabeza, y describe el mecanismo de construcción Se divide *a* en dos partes y se une el punto B al punto E. Después BE se proyecta hacia arriba desde el punto E. Construimos un cuadrado de longitud x que es la solución pedida







Intuyendo ya la solución, se hace explícita en el papel donde lo pedido está dibujado. Se observa ahora todos los elementos necesarios para la resolución. Sólo quedaría por demostrar que se ha solucionado el problema:

Aplicando el teorema de Pitágoras: $(a/2+x)^2=(a/2)^2+a^2$

Y por consiguiente: $x+\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}}a$

En esencia, se trata de reducir el problema a una ecuación de primer grado.

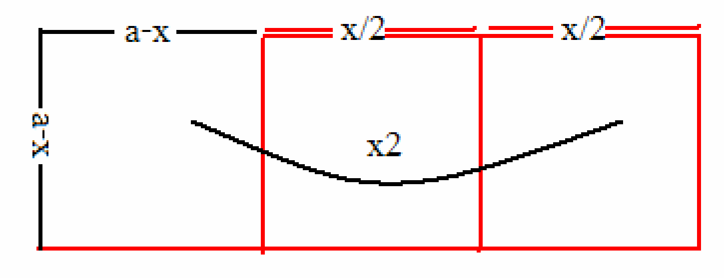
Después de esta fase analítica hay que probar que $x^2=a.(a-x)$. Por tanto habrá que descender hasta demostrar lo pedido, en la síntesis del problema

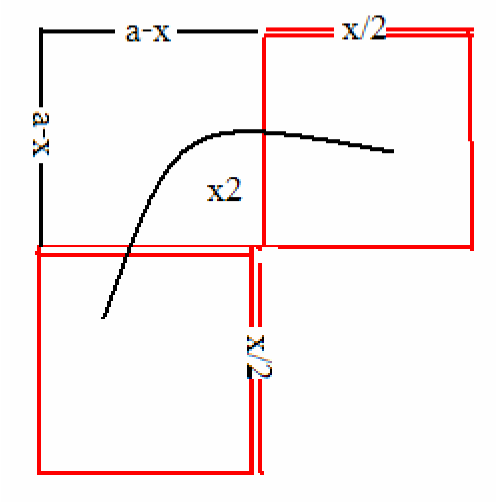
$EF=EB\rightarrow CF.FA+AE^2=EB^2$

$BA^2+AE^2=EB^2\rightarrow CF.FA+AE^2=AB^2+AE^2\rightarrow CF.FA=AB^2$

CF.FA=CF.FG=□FK=□AD[2]→=□FK-□AK=□AD-□AK→-□**FH=□HD** .q.e.d.

Es seguro, que los babilonios carecían de esta capacidad de síntesis. Un diagrama apropiado a su época sería el siguiente:





Hemos formado el cuadrado $(a-x+\frac{x}{2})^2=x^2+\frac{x^2}{4}$

Cada lado mide: $a+\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}}x$

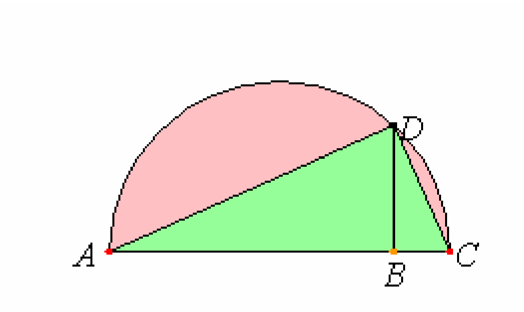
[2] □ área al unir los puntos F y K (no directamente)

De nuevo se reduce el problema a una ecuación de primer grado.

En el libro II todas las cantidades están representadas geométricamente. Los números se reemplazan por segmentos; el producto se transforma en el área del rectángulo; el producto de tres números es un volumen; la suma de dos números se refleja en la prolongación de un segmento en una longitud igual a la del otro, y la resta en cercenar de un segmento la longitud del segundo. La división de un producto (un área) por un tercer número se realiza hallando un rectángulo que tenga como lado a este ultimo y cuya área sea igual al producto dado, siendo entonces el otro lado el cociente buscado. La construcción utiliza la teoría de aplicación de áreas mencionada en la proposición 43 del libro I[3].

Libro VI

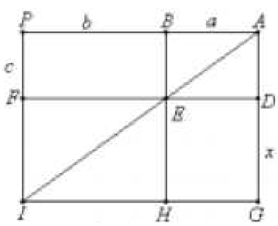
En el libro VI se estudia la proporcionalidad entre segmentos y la semejanza entre figuras planas. En la proposición 13: *Dadas dos rectas, encontrar una media proporcional*. A esta proposición se le encuentra una interpretación algebraica sencilla: la media proporcional es equivalente a calcular la raíz cuadrada, ya que si $a\ x = x\ b$ se cumple que $x^2 = ab$ es decir que $x = \sqrt{a.b}$. Pero en esta proposición, el procedimiento propuesto para hallar la media proporcional, utilizando una semicircunferencia auxiliar, es puramente geométrico.



AB/BD=DB/BC

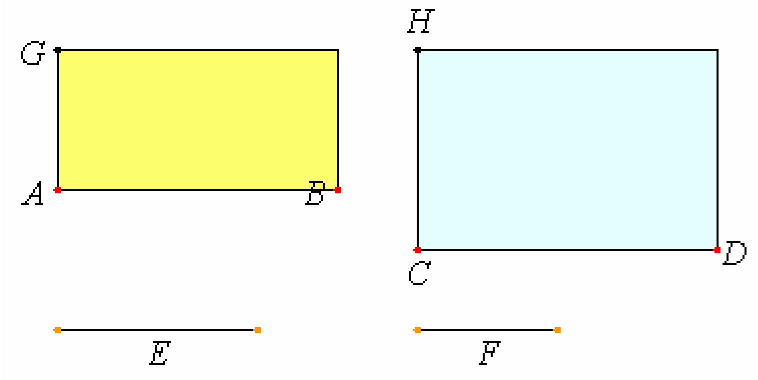
La proposición 16 equivale a la propiedad de los quebrados que expone que si $a\ b = c\ d$ se verifica que $a.d = b.c$. Pero de nuevo el planteamiento es geométrico. **Proposición 16**. *Si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo*

3



$$x = \frac{b.c}{a}$$

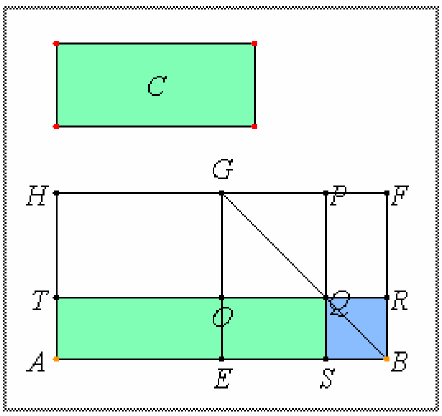
comprendido por las medias; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias, las cuatro rectas serán proporcionales.



La proposición 28 si se plantea como un problema algebraico, permite resolver "geométricamente" una ecuación de 2º grado.

Proposición 28. *Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada deficiente en una figura paralelograma semejante a una dada; pero es necesario que la figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido a partir de la mitad y semejante al defecto.*

La ecuación de 2º grado sería: $ax-x^2=c$; $x.(x-a) = c$



1) Divide el segmento *a = AB en dos partes iguales y construye un cuadrado EBFG* El área de este cuadrado debe ser mayor que c *o no habría solución*

2). Si el área *AEGH es c entonces x = AH* y el problema está resuelto.

3) Si el área del cuadrado *AEGH es mayor que c construye el cuadrado OQPG* de superficie igual a la diferencia de las áreas. El cuadrado *OQPG* y *SBQR están dispuestos sobre la diagonal. Trazad la diagonal y completad la figura*

4). El área de la figura *OEBFPQ es igual a c*. Se observa que el área del rectángulo *TAQS es igual al área de OEBFPQ , por tanto igual a c*. Por tanto $x = TA$

En el diagrama se observa que: $(a/2)^2 = (a/2-x)^2 + c$ *De nuevo al resolver problemas de superficies de cuadrados y calcular el lado, simplificamos la ecuación a una de primer grado*

Euclides halla sus resultados con el análisis pero sólo presenta la síntesis, no muestra cómo lo encontró.

La comparación con los métodos geométricos-algebraicos de los babilonios es inevitable. Si prescindimos de la parte sintética de demostración, la parte que viaja desde lo complejo a lo simple, las construcciones diagramáticos, las técnicas de simplificación de ecuaciones a ecuaciones de primer grado son herencia directa de los antecesores asiáticos.

Podría haber dicho Euclides, *dese por hecho*, construir la figura que cumple las condiciones iniciales, y a partir de ahí mediante métodos geométricos encontrar una relación de x con los parámetros conocidos. Es decir la fase deductiva pasa previamente por una fase analítica.

El método demostrativo en la exposición de los teoremas de Euclides es la síntesis. Se desciende desde lo evidente a lo desconocido, sin embargo el análisis juega una labor principal en el encuentro de las verdades por demostrar. Sin ánimo de generalizar, la vía deductiva es netamente sintética en Apolonio, en Euclides hay una fase analítica, aunque la demostración se presenta vía sintética, pero con Arquímedes, el análisis tanto en su vertiente teorética como en la problemática es primordial en su obra, tanto es así que en sobre la esfera y el cilindro II todas las proposiciones están resueltas mediante el análisis-síntesis.

SOCIEDAD DE LA INFORMACION

www.sociedadelainformacion.com

Edita: CEFALEA

Director: José Ángel Ruiz Felipe
Jefe de publicaciones: Antero Soria Luján
D.L.: AB 293-2001
ISSN: 1578-326x